بنام خدا

جزوه انتقال حرارت۱

در این جزوه مباحث زیر را می خوانید:

شیوه های مختلف انتقال حرارت

معادله پخش گرما و شرایط مرزی

هدایت گرمایی

انتقال حرارت جابجایی

جابجایی اجباری خارجی

جابجایی اجباری داخلی

1

فصل اول: شیوه های مختلف انتقال حرارت

موضوع علم انتقال حرارت

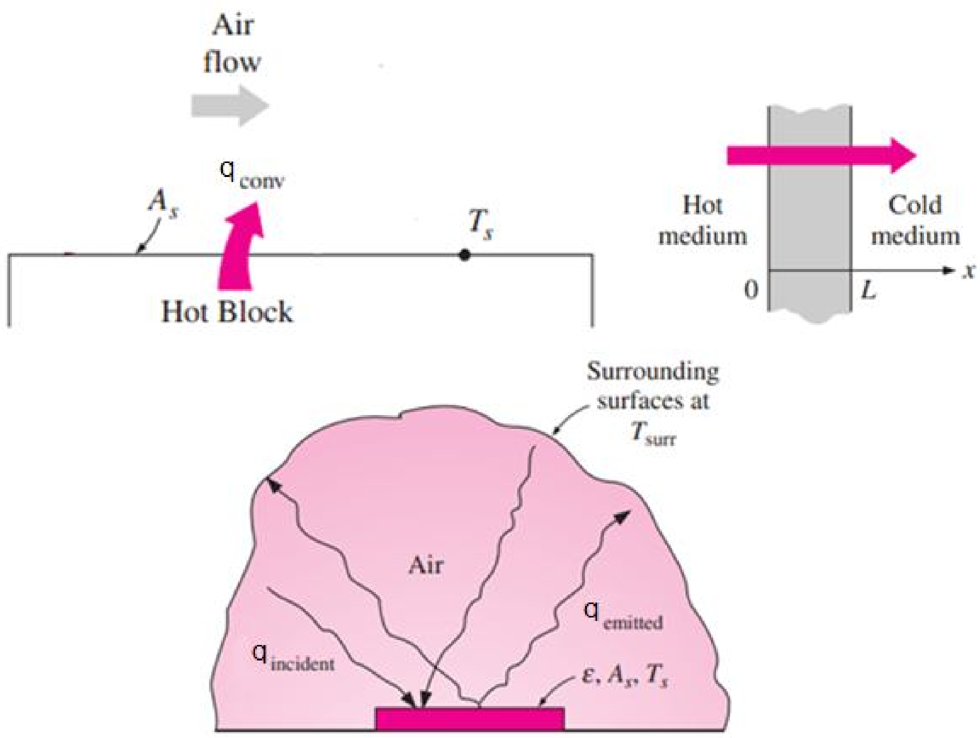
انتقال حرارت در واقع گسترش تجزیه و تحلیل های ترمودینامیک از طریق مطالعه شیوه های انتقال گرما و بدست آوردن روابطی برای محاسبه نرخ انتقال گرماست. در ترمودینامیک تبادل گرما و نقش حیاتی آن در قوانین اول و دوم مورد بحث قرار می گیرد ولی مکانیزمهای انتقال گرما و روشهای محاسبه نرخ آن مورد بررسی قرار نمی گیرد. ترمودینامیک با حالت های تعادل ماده سروکار دارد و در حالت تعادل گرادیان دما وجود ندارد. انتقال حرارت بدنبال انجام کاری است که ترمودینامیک ذاتاً از انجام آن ناتوان است.

انتقال حرارت(**Heat Transfer**)

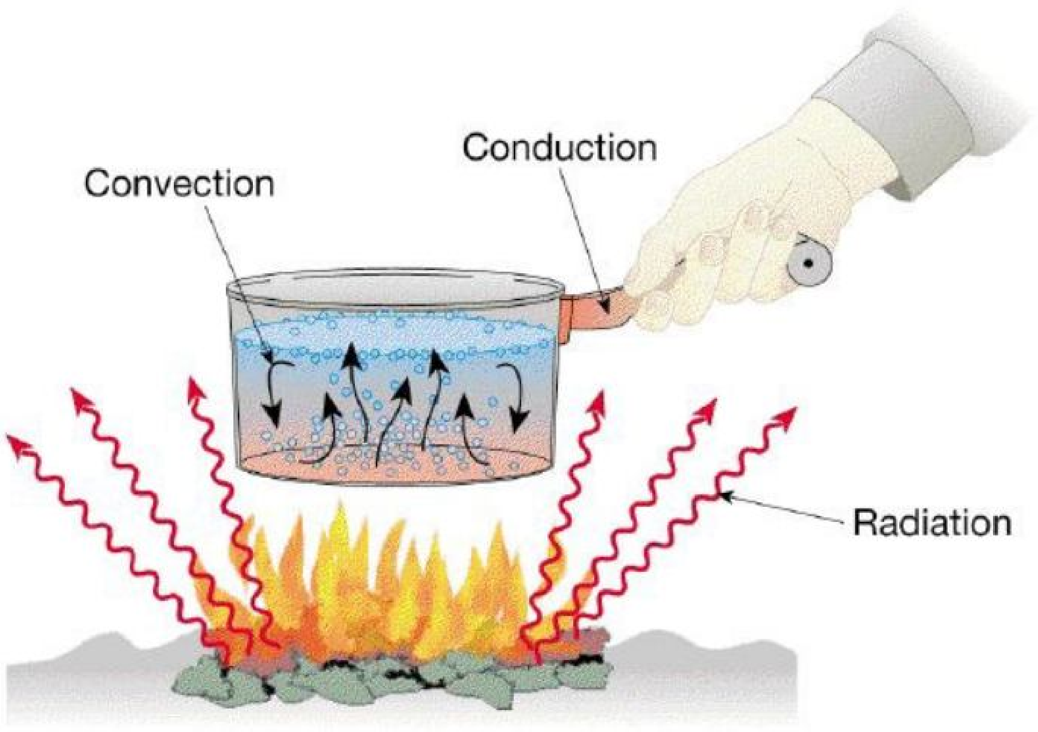
انتقال حرارت (گرما) جریان انرژی ناشی از اختلاف دماست. هنگامیکه اختلاف دما در یک محیط یا بین اجسام وجود داشته باشد انتقال گرما بایستی رخ دهد.

شیوه های انتقال حرارت(**Heat Transfer Methods**)

انواع مختلف فرایندهای انتقال گرما شیوه های انتقال حرارت نامیده می شود اگر گرادیان دما در محیط ساکنی که می تواند جامد یا سیال باشد وجود داشته باشد از واژه هدایت برای معرفی نوع انتقال گرمای این محیط استفاده می شود. از طرف دیگر واژه جابجایی هنگامی بکار می رود که انتقال گرما بین یک سطح و یک سیال متحرک وجود داشته باشد سومین شیوه انتقال گرما تشعشع گرمایی نام دارد. کلیه سطوحی که دمای معین دارند انرژی را به شکل امواج الکترومغناطیس صادر می کنند. بنابراین در غیاب یک ماده واسطه انتقال گرمای خالص بواسطه تشعشع بین دو سطح با دماهای متفاوت وجود خواهد داشت.



در خیلی از موارد هر سه شیوه انتقال حرارت وجود دارد:



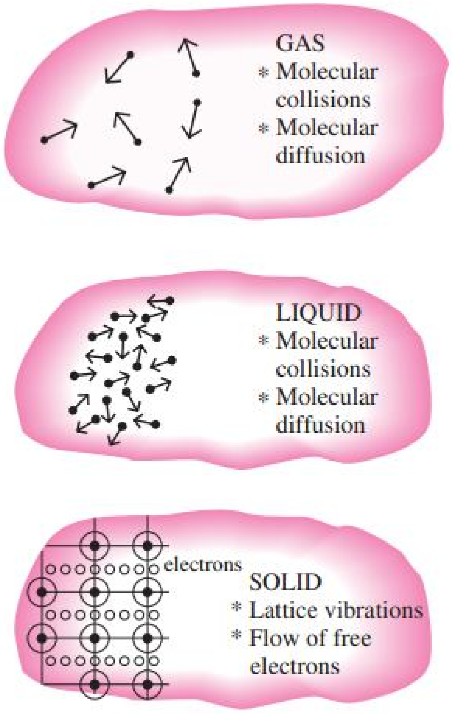
هدایت(Conduction)

هدایت انتقال انرژی از ذرات پرانرژی به ذرات کم انرژی در یک ماده است که براثراندرکنشهای بین ذرات صورت می گیرد. برای درک بهتر گازی را در نظر بگیرید که در آن گرادیان دما وجود داشته باشد و فرض کنید گاز ساکن باشد. این گاز فضای بین دو سطح با دماهای متفاوت را پر کرده است. دمای هر نقطه به انرژی ملکول های گاز در مجاورت آن نقطه وابسته است. این انرژی به حرکت تصادفی و انتقالی و همچنین به حرکتهای چرخشی و ارتعاشی درونی ملکول ها ارتباط دارد. هنگام برخورد ملکول های مجاور به یکدیگر انرژی از ملکول های پر انرژی به ملکول های کم انرژی منتقل می شود.

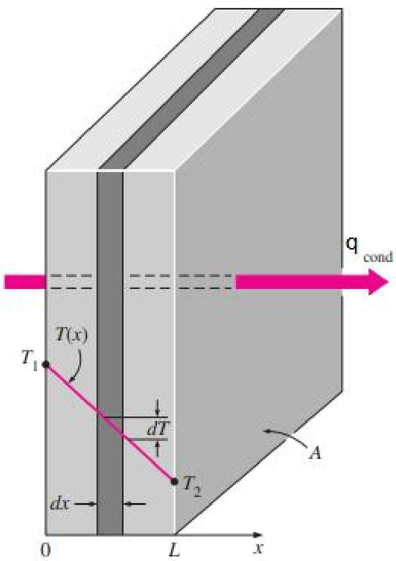
انتقال گرما در جهت کاهش دما رخ می دهد و به انتقال خالص انرژی در اثر حرکت تصادفی ملکول ها پخش انرژی گفته می شود.(Diffusion)

وضع مشابهی در مایعات وجود دارد با این تفاوت که فاصله ملکول ها کمتر و اندرکنشهای ملکولی قویتر و بیشتر هستند.در یک جسم جامد هدایت را می توان به فعالیت اتمی به شکل ارتعاشات شبکه ای نسبت داد.

در نظریه های جدید انتقال انرژی را به امواج شبکه ای نسبت میدهند که در اثر القای حرکت اتمی بوجود می آید در غیر هادیها انرژی منحصراً توسط این امواج شبکه ای انتقال می یابد در حالیکه در هادیها علاوه بر مکانیزم فوق حرکت انتقالی الکترونهای آزاد نیز نقش دارد.



قانون فوریه(Fourier's Law)



معادله شار انتقال گرما برای هدایت گرمایی قانون فوریه نام دارد:

$$\boxed{q''_x = -k\frac{dT}{dx}}$$

q''_x:نرخ انتقال گرما بر واحد سطح عمود بر جهت انتقال گرما (Heat Flux)

K:ضریب رسانایی گرمایی(Thermal Conductivity)

$\frac{dT}{dx}$: گرادیان دما(Temperature Gradient)

K بستگی به جنس دیوار داشته واحد آن $\frac{W}{mK}$ است.مفهوم علامت منفی این است که گرما در جهت کاهش دما انتقال می یابد.

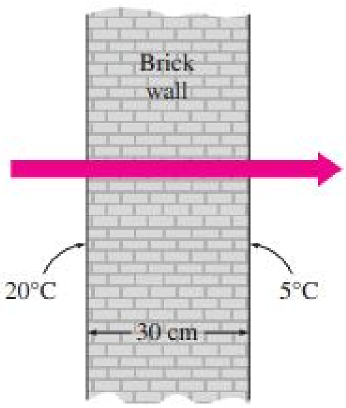
اگر توزیع دما خطی باشد: $q''_x = -k\frac{T_2 - T_1}{L}$

نرخ انتقال گرما (Heat Rate)بواسطه هدایت(q_x) از دیواری به مساحت A برابر حاصلضرب شار گرما در مساحت سطح خواهد بود:

$$\boxed{q_x = q''_x A = -kA\frac{dT}{dx}}$$

تمرین

دمای سطوح داخلی و خارجی یک دیوار آجری به ضخامت 30cm به ترتیب 20C و5C است. افت گرما در این دیوار به ابعاد 5m و 6m را پیدا کنید. ضریب هدایت گرمایی آجر $0.69\frac{W}{mK}$ است.



جابجایی(Convection)

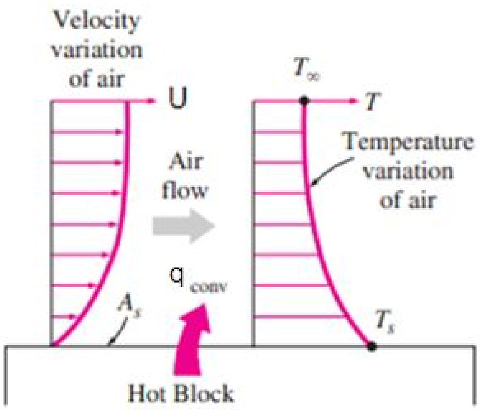
انتقال گرمای جابجایی از دو مکانیزم تشکیل می شود:

۱- انتقال انرژی بواسطه حرکت تصادفی ملکول ها(پخش گرما Diffusion)
۲- انرژی توسط حرکت حجمی سیال(ادواکسیون Advection)

نتیجه اندرکنش بین سطح و سیال رشد ناحیه ای در سیال است که در آن سرعت سیال از صفر برروی سطح تا مقدار معین U در داخل جریان تغییر می کند. این ناحیه از سیال لایه مرزی سرعت نام دارد. (Hydrodynamic Boundary Layer)

اگر دماهای سطح و سیال متفاوت باشند ناحیه ای در سیال وجود خواهد داشت که در آن دما از T_s در y = 0 تا T_∞ در جریان آزاد تغییر می کند این ناحیه را لایه مرزی گرمایی می نامند (Thermal Boundary Layer) که ضخامت آن می تواند کوچکتر، مساوی یا بزرگتر از لایه مرزی سرعت باشد.

در نزدیکی سطح حرکت تصادفی ملکول ها (پخش گرما) وجه غالب را دارد. همزمان با پیشرفت سیال در جهت X حرکت توده سیال نقش غالب را پیدا می کند.



انواع انتقال گرمای جابجایی

۱- جابجایی اجباری(Forced Convection): هنگامیکه جریان توسط عوامل خارجی نظیر فن یا پمپ ایجاد شود.

۲- جابجایی آزاد(Free Convection):هنگامیکه جریان توسط نیروهای غوطه وری(Buoyancy Forces) ایجاد می شود که بعلت اختلاف چگالی ناشی از تغییرات دما در سیال بروز می کند.

۳- جابجایی بواسطه تغییر فاز (جوشش و میعانBoiling and Condensation)

قانون سرمایش نیوتن(Newton's Law of Cooling)

در انتقال گرمای جابجایی از هر نوع که باشد معادله نرخ انتقال گرمای مناسب بصورت زیر است:

$$\boxed{q = q''A = hA(T_s - T_\infty)}$$

hضریب انتقال حرارت جابجایی(Convection Heat Transfer Coefficient) نام دارد که بستگی به شکل هندسی سطح،دمای سیال و سطح، طبیعت سیال، خواص ترمودینامیکی و انتقالی سیال دارد.مایعات ضریب انتقال حرارت جابجایی بزرگتری نسبت به گازها دارند.

تمرین

یک المان الکتریکی داخل استوانه طویلی به قطر 30mm کار گذاشته شده است. وقتی که آب 25°C با سرعت $1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ عمود بر استوانه جریان می یابد، توان 28kw بر واحد طول لازم است تا سطح استوانه را در دمای یکنواخت 90°Cنگه دارد. ولی اگر هوا با دمای 25°C و سرعت $10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ روی استوانه جریان یابد مقدار توان لازم برای تأمین همان دما $400W$ بر واحد طول خواهد بود. ضرایب انتقال گرمای جابجایی را برای جریان های آب و هوا محاسبه کرده و مقایسه کنید.

تشعشع(Radiation)

تشعشع گرمایی به انرژی صادر شده از ماده ای با دمای معین اطلاق می شود. انرژی تشعشعی توسط امواج الکترومغناطیسی (فوتونها Photons) منتقل می شود.تشعشع برخلاف هدایت و جابجایی نیازمند محیط مادی نیست در حقیقت انتقال تشعشع در خلا بهتر صورت می گیرد.

قانون استفن بولتزمن(Stefan – Boltzmann Law)

مقدار گرمای تشعشعی صادره از یک سطح به دمای T_s (بر حسب کلوین) و مساحت A از رابطه زیر بدست می آید:

$$\boxed{q = q''A = \varepsilon\sigma A T_s^4}$$

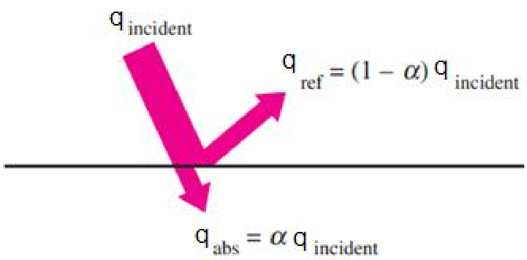
εرا ضریب صدور سطح (Emissivity) می نامند که از مشخصات سطح بوده و همواره بین صفر ویک است برای جسم سیاه (Black Body) مقدار آن برابر یک است.جسم سیاه به جسمی گفته می شود که هم انرژی را تماما جذب نماید و هم صادر کننده خوبی باشد.

σثابت استفن بولتزمن نام داشته و برابر $5.67 \times 10^{-8}\ \frac{W}{m^2K^4}$ است.

هنگام برخورد انرژی تشعشعی به یک سطح بخشی از آن جذب خواهد شد نرخ جذب انرژی بر واحد سطح با استفاده از ضریب جذب α (Absorptivity) قابل محاسبه است:

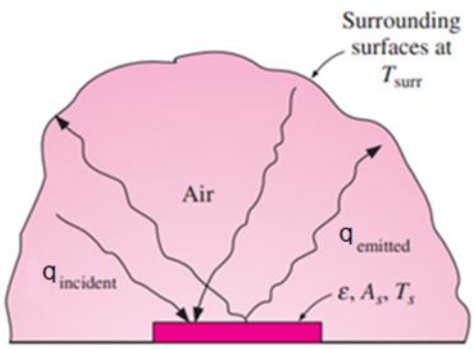
$$q''_{abs} = \alpha q''$$

ضریب جذب یک سطح همانند ضریب صدور همواره بین صفر و یک است.صدور تشعشع و جذب تشعشع بترتیب باعث کاهش و افزایش انرژی گرمایی ماده می شود.



تبادل خالص بین یک سطح کوچک و سطحی بزرگتر محیط برآن

فرض می کنیم سطح و محیط(Surrounding) توسط گازی جدا شده اند که هیچگونه تأثیری بر انتقال تشعشع ندارد و $\alpha = \varepsilon$ در سطح کوچکتر برقرار است یعنی سطح خاکستری است(Gray Surface)



مقدار انتقال حرارت خالص تشعشعی بین سطح و دیواره های محفظه از رابطه زیر بدست می آید:

$$\boxed{q = q''A = \varepsilon\sigma A(T_s^4 - T_\infty^4)}$$

رابطه فوق را می توان بصورت زیر نوشت:

$$q = h_r A(T_s - T_{surr})$$

که در آن

$$h_r = \varepsilon\sigma(T_s + T_{surr})(T_s^2 + T_{surr}^2)$$

h_rضریب انتقال گرمای تشعشعی(Radiation Heat Transfer Coefficient) بشدت به دما وابسته است در حالیکه وابستگی ضریب انتقال گرمای جابجایی h به دما ضعیف است.

در حالتی که انتقال حرارت جابجایی هم مهم باشد مقدار کل انتقال حرارت از رابطه زیر بدست می آید:

$$q = q_{conv} + q_{rad} = hA(T_s - T_\infty) + \varepsilon A\sigma(T_s^4 - T_{surr}^4)$$

بطور کلی هرگاه در مساله ای تشعشع وجود داشته باشد دماها باید به کلوین تبدیل شوند.

تمرین

دمای سطح یک شیء کروی به قطر 10mm و ضریب صدور 0.9 که با آب خنک می شود 80°C است هنگامی که این شیء در کوره خلأ بزرگی با دمای 400°C قرار می گیرد، نرخ انتقال گرمای خالص از دیواره های کوره به شیء را محاسبه کنید.

بقای انرژی(Conservation of Energy)

می توان این قانون را در دو شکل بیان کرد: بصورت لحظه ای و بصورت متوسط.

۱. در یک لحظه زمانی t:

نرخ ورود انرژی های گرمایی و مکانیکی به حجم کنترل به اضافه نرخ تولید انرژی گرمایی در داخل حجم کنترل منهای نرخ خروج انرژیهای گرمایی و مکانیکی از حجم کنترل باید با نرخ افزایش انرژی ذخیره شده در حجم کنترل برابر باشد.یعنی:

$$\boxed{\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_g = \frac{dE_{st}}{dt} = \dot{E}_{st}}$$

۲. در یک بازهٔ زمانی Δt:

مقدار انرژیهای گرمایی و مکانیکی ورودی به حجم کنترل به اضافهٔ مقدار انرژی گرمایی تولید شده در داخل حجم کنترل منهای مقدار انرژیهای مکانیکی و گرمایی که حجم کنترل را ترک می کنند باید با مقدار انرژی ذخیره شده در حجم کنترل برابر باشد:

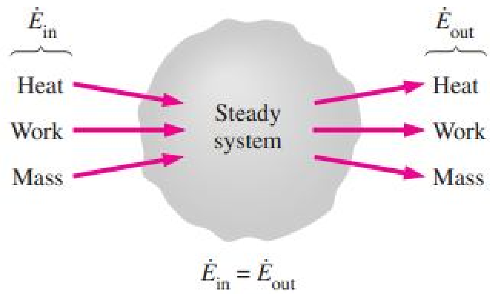
$$\boxed{E_{in} - E_{out} + E_g = \Delta E_{st}}$$

$\dot{E}_{in}$ و $\dot{E}_{out}$ که پدیده های سطحی هستند بترتیب بیانگر نرخ انرژیهای ورودی(Input Energy Rate) ونرخ انرژیهای خروجی(Output Energy Rate) می باشند.

$\dot{E}_g$ و $\dot{E}_{st}$ که پدیده های حجمی هستند بترتیب بیانگر نرخ تولید انرژی(Generation Energy Rate) و نرخ ذخیره انرژی (Storted Energy Rate)درحجم کنترل می باشند.

در حالت دائم(Steady State) $\dot{E}_{st} = 0$ یا $\Delta E_{st} = 0$.

حالت دائم یا پایدار حالتی است که با گذشت زمان جرم یا انرژی داخل حجم کنترل تغییر نکند.



معادله بقای انرژی درحالت دائم که تولید گرما درون جسم وجود نداشته باشد.

اگر شرایط دائمی نباشد(Unsteady) نرخ انرژی ذخیره شده از رابطه زیر بدست می آید:

$$\dot{E}_{st} = \rho C V \frac{dT}{dt}$$

در این رابطه ρ جرم حجمی،Cگرمای ویژه و V حجم جسم است. $\frac{dT}{dt}$ تغییرات دما نسبت به زمان را نشان می دهد.

تمرین

یک صفحه آلومینیومی به ضخامت 6mm با کف کاملاً عایقبندی شده در وضعیت افقی قرار دارد. یک پوشش مخصوص و نازک با ضریب صدور 0.25 روی سطح بالایی صفحه قرار گرفته و 80٪ تشعشع ورودی خورشید را جذب می کند چگالی ρ و گرمای ویژه C آلومینیوم بترتیب $2700\,\frac{kg}{m^3}$ و $900\,\frac{J}{kgK}$ است.

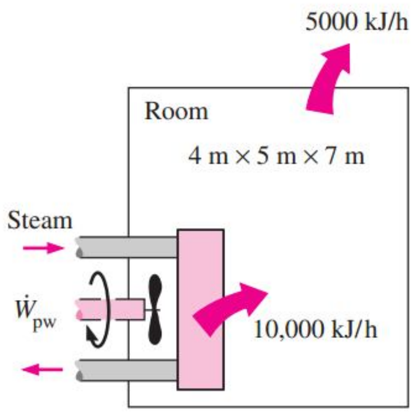
- الف– دمای صفحه 25°C بوده و ناگهان سطح بالایی آن در معرض هوای محیط به دمای $T_\infty = 20°C$ قرار می گیرد. شار تشعشع ورودی به سطح $900\,\frac{W}{m^2}$ و ضریب انتقال گرمای جابجایی بین صفحه و هوا برابر $h = 20\,\frac{W}{m^2K}$ است. نرخ تغییر اولیه دمای صفحه را پیدا کنید.
- ب– هنگامی که شرایط دائم برقرار می شود دمای تعادل صفحه چقدر خواهد شد؟

تمرین

یک صفحه شیشه ای به دمای 600℃ با عبور هوا از روی آن با ضریب جابجایی $h = 5\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}}$ سرد می شود. برای جلوگیری از ترک خوردگی در طول فرایند سرمایش گرادیان دما نباید از $15\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{mm}}$ در هر نقطه از شیشه تجاوز کند. اگر ضریب هدایت شیشه $1.4\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{mK}}$ و ضریب صدور سطح آن 0.8 باشد کمترین دمای هوا که بتواند سرمایش را شروع کند چقدر است؟ دمای هوا و محیط یکسان هستند.

تمرین

اتاقی به ابعاد $4m\times5m\times7m$ توسط رادیاتوری قرار است گرم شود.نرخ انتقال گرمای رادیاتور10000kJ/hاست.از یک فن به قدرت100W بمنظور توزیع یکنواخت گرمای اتاق استفاده می شود.چون دیواره های اتاق بخوبی عایق نشده اند،گرما با نرخ5000kJ/h از اتاق به محیط اطراف هدر می رود.اگر دمای اولیه هوای اتاق10C باشد،تعیین کنید چه مدت زمان طول خواهد کشید تا دمای اتاق به 20C افزایش یابد.



فصل دوم: معادله پخش گرما و شرایط مرزی

همانطور که قبلاً بیان شد هدایت گرمایی انتقال انرژی بواسطه وجود گرادیان دما در یک ماده است.

قانون فوریه که در فصل اول بصورت $q = -kA\frac{dT}{dx}$ بیان شد از پدیده های تجربی استخراج شده است که می توان صحت آنرا با در نظر گرفتن یک میله بطول Δx و سطح مقطع A که دماهای دو وجه آن T_1 و T_2 است نشان داد.آزمایشات نشان می دهند: $q\alpha A\frac{\Delta T}{\Delta x}$

بدیهی است مقدار q به جنس میله هم وابسته است.با ضرب ثابتی (که به جنس ماده بستگی دارد)می توان رابطه فوق را از تناسب به یک تساوی تبدیل نمود: $q = -kA\frac{dT}{dx}$

k را ضریب هدایت گرمایی ماده با واحد $\left(\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m.K}}\right)$ می نامند که مقدار آن برای مواد مختلف از جداول مربوطه قابل استخراج است.

شار گرمایی هم بصورت زیر تعریف می شود:

$$q" = \frac{q}{A} = -k\frac{dT}{dx}$$

علت بکار بردن علامت منفی این است که انتقال گرما همواره در جهت کاهش دما صورت می گیرد. می توان شار گرما را یک کمیت برداری در نظر گرفت که همیشه بر سطح مقطع A عمود است. به سطوح دما ثابت سطوح همدما (Isothermal Surfaces) گفته می شود. سطوح ایزوترم صفحات عمود بر محور x است. در نتیجه شکل کلی تر معادله انتقال گرما (قانون فوریه) بصورت زیر است:

$$\boxed{q'' = -k\left(i\frac{\partial T}{\partial x} + j\frac{\partial T}{\partial y} + k\frac{\partial T}{\partial z}\right)}$$

شار گرما در جهت n بصورت زیر تعریف می شود:

$$\mathrm{q"_n} = -\mathrm{k}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{n}}$$

در نتیجه رابطه کلی شار را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\boxed{q'' = iq''_x + jq''_y + kq''_z}$$

که در آن:

$$\mathrm{q"_x} = -\mathrm{k}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}} \quad \mathrm{q"_y} = -\mathrm{k}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{y}} \quad \mathrm{q"_z} = -\mathrm{k}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{z}}$$

در این روابط، جسم، ایزوترپ (Isotropic) فرض می شود یعنی ضریب هدایت گرمایی مستقل از جهت است. در انتقال حرارت اجسام مورد مطالعه را ایزوتروپیک فرض می کنند که برای همه مواد بجز کامپوزیتها فرض قابل قبولی است.بطور کلی ضریب هدایت گرمایی برای جامدات بیشتر از مایعات و مایعات هم بیشتر از گازها است که دلیل آن در فواصل بین ملکولی است.

رابطه ضریب هدایت با دما

برای گازها تناسب زیر بین ضریب هدایت گرمایی با ویژگیهای مولکولی وجود دارد:

$k \alpha\, n\overline{C}\lambda$

که در آن

$\bar{C}$ سرعت متوسط ملکولی،n تعداد ذرات بر واحد حجم و λ مسافت آزاد میانگین (Mean Free Path) است.

مسافت آزاد میانگین فاصله متوسطی است که ملکول ها قبل از تصادم طی می کنند.بدیهی است برای گازها ضریب انتقال حرارت هدایتی با افزایش دما و کاهش وزن ملکولی، افزایش پیدا می کند چون دما که افزایش یابد هم سرعت مولکولی افزایش می یابد و هم بدلیل انبساط، فاصله مولکولها از هم افزایش می یابد و لذا مسافت بیشتری تا قبل از برخورد طی می کنند اگرچه با افزایش دما تعداد ذرات بر واحد حجم کاهش می یابد.ولی ضریب هدایت گرمایی یک گاز مستقل از فشار است چون n و λ بترتیب نسبت مستقیم و معکوس با فشار گاز دارند.

برای مایعات غیرفلزی باستثنای آب و گلیسیرین ضریب هدایت با افزایش دما کم می شود همچنین با افزایش وزن ملکولی مایع کاهش می یابد.

سیستم های عایق(Insulation Systems)

عایق های گرمایی شامل ترکیبی از موادی با ضریب هدایت گرمایی کم هستند که برای ساختن سیستم های با ضریب هدایت گرمایی کم بکار می روند. اگر فضاهای خالی کوچک در اثر بهم پیوستن قسمتهایی از مادهٔ جامد یا مذاب تشکیل شوند محفظه صلب و متخلخلی بوجود می آید وقتی که فضاهای کوچک راهی به یکدیگر نداشته باشند سیستم را عایق سلولدار(Cellular Insulation) می نامند مانند سیستم اسفنجی. عایقهای انعکاسی (Reflective Insulations) از صفحات یا فویلهای نازک و موازی و چند لایه که دارای ضریب انعکاسی زیادی هستند تشکیل شده و برای منعکس کردن گرما بکار می روند مانند فلاکس چای.

فضاهای بین فویلها غالباً خالی است. انتقال گرما در سیستم های عایق غالباً چندین شیوهٔ انتقال حرارت را در بر می گیرد. مانند هدایت از بین مواد جامد هدایت و جابجایی در هوای محصور بین محفظه و تشعشع.

خواص ترموفیزیکی (Thermophysical Properties)

بطورکلی خواصی از ماده که در انتقال حرارت اهمیت دارند به دو نوع تقسیم می شوند.

۱- خواص انتقالی(Transport Properties): k,υ (لزجت سینماتیکی و ضریب رسانش گرمایی)
۲- خواص ترمودینامیکی(Thermodynamic Properties): ρ, C_P (گرمای ویژه و چگالی)

ρC_P را ظرفیت گرمایی حجمی ماده (Volumetric Heat Capacity)می نامند که قابلیت ماده در ذخیره انرژی گرمایی را بیان می کند.

برای جامدات و مایعات چون $\rho C_P >> 1$ در نتیجه ذخیره کننده های خوبی از حرارت هستند.

از طرفی برای گازها $\rho C_P \approx 1$ در نتیجه گازها ذخیره کننده ضعیفی برای انرژی گرمایی می باشند.

$\alpha = \frac{k}{\rho C_P}$را ضریب پخش گرمایی (Thermal Diffusivity)می نامند.موادی که ضریب پخش گرمایی بالاتری داشته باشند نسبت به تغییرات دمایی سریعتر پاسخ می دهند.

معادله پخش گرما(Heat Diffusion Equation)

معادله پخش گرما در حالت کلی یک معادله دیفرانسیلی مشتقات جزیی غیرهمگن و مرتبه دو است که با حل آن به کمک شرایط مرزی و اولیه، توزیع دما در جسم بدست می آید. توزیع دما رابطه ای است که دما را به مکان و زمان ربط می دهد بطوریکه با معلوم بودن مختصات نقطه در هر زمان بکمک این رابطه می توان دما را در آن نقطه تعیین کرد.معادله پخش گرما و شار حرارتی در مختصاتهای مختلف بصورت زیر است:

سیستم دکارتی(Cartesian Coordinates):

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{\dot q}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}} \qquad q''=-k\left(i\frac{\partial T}{\partial x}+j\frac{\partial T}{\partial y}+k\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

سیستم استوانه ای(Cylindrical Coordinates):

$$\boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \emptyset}\left(k\frac{\partial T}{\partial \emptyset}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot q=\rho C_p\frac{\partial T}{\partial t}} \quad q''=-k\left(i\frac{dT}{dr}+j\frac{1}{r}\frac{dT}{d\emptyset}+k\frac{dT}{dz}\right)$$

سیستم کروی(Spherical Coordinates):

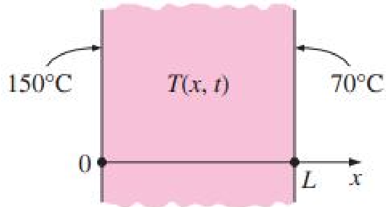
$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2 \mathrm{Sin}^2\theta}\frac{\partial}{\partial \emptyset}\left(k\frac{\partial T}{\partial \emptyset}\right)+\frac{1}{r^2 \mathrm{Sin}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(k\,\mathrm{Sin}\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)+\dot q=\rho C_p\frac{\partial T}{\partial t}} \quad q''=-k\left(i\frac{\partial T}{\partial r}+j\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \emptyset}+k\frac{1}{r\,\mathrm{Sin}\theta}\frac{\partial T}{\partial \emptyset}\right)$$

شرایط مرزی و اولیه(Boundary and Initial Conditions)

حل معادله دما مستلزم داشتن دو شرط مرزی به ازای هر مختصات مکانی (چون نسبت به مکان از مرتبه دوم است) و یک شرط اولیه است چون نسبت به زمان از مرتبه اول است. البته در مسائل دائمی چون جمله زمان وجود ندارد،به هیچ شرط اولیه ای نیاز نیست.از این شرایط برای تعیین ثابتهایی که از حل معادله مشتقات جزیی پخش گرما بدست می آید،استفاده می شود.پنج نوع شرط مرزی که معمولاً در انتقال حرارت وجود دارند بصورت زیر است:

۱- شرط مرزی دیریشلت (Dirichlet Boundary Condition):

این وضعیت هنگامی است که سطح در دمای ثابت و معلومی قرار داشته باشد مانند شرایط مرزی شکل زیر:



$T(0, t) = 150°C$
$T(L, t) = 70°C$

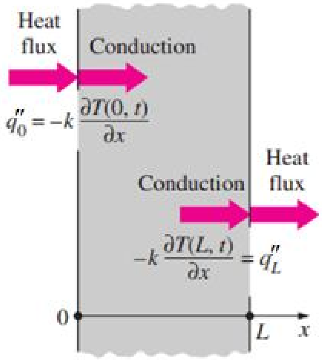
در این شکل،دماهای دو وجه چپ($x=0$) و راست($x=L$) معلوم است.شکل کلی شرط مرزی نوع اول بصورت زیر است:

$$\boxed{\begin{aligned}T(0,t)&=T_1\\T(L,t)&=T_2\end{aligned}}$$

که در آن T_1و T_2 دماهایی معلومند.

۲- شرط مرزی نیومن(Neumann Boundary Condition):

در این حالت شار گرمایی ثابت و معین q'' در سطح برقرار است.شرایط مرزی شکل زیر را ببینید.



در حالت کلی،شرط مرزی نیومن بصورت زیر است:

$$\boxed{-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_x = q''_x}$$

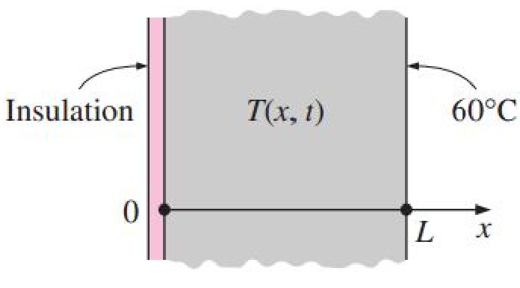
که در آن x مکانی معلوم بوده که شار حرارتی در آنجا وجود دارد.

حالت خاص نیومن زمانی است که سطح، آدیاباتیک یا عایق شده باشد، چون $q''_x=0$ لذا:

$$\boxed{\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_x = 0}$$

که در آن x مکان قرارگرفتن عایق است.

مثلا در شکل زیر وجه چپ(x=0) عایق است و وجه سمت راست(x=L) در دمای ثابتی قرار دارد.

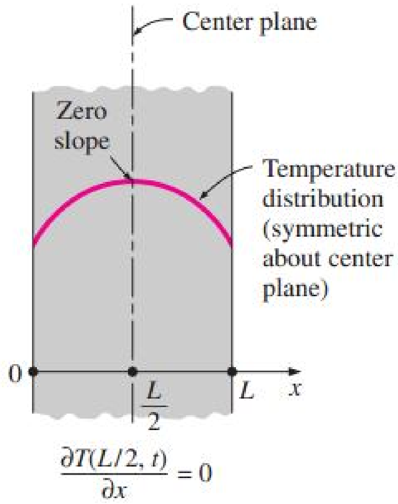


$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}=0$$
$$T(L,t)=60°C$$

ویا در لایه ای از دیوار که توزیع دما نسبت به آن لایه متقارن باشد(مطابق شکل زیر) چون شیب نمودار دما در آن لایه صفر است گرادیان دما برابر صفر خواهد بود.

$$\boxed{\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_x = 0}$$

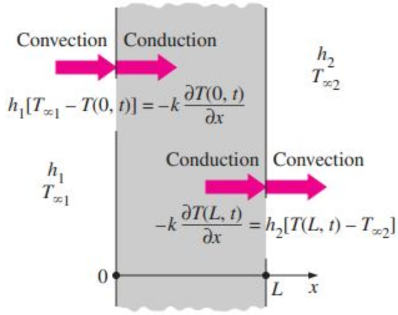
x مکان لایه ای است که تقارن دمایی نسبت به آن وجود دارد.



۳- شرط مرزی جابجایی(Convection Boundary Condition):

این حالت از موازنه انرژی در سطح ماده که در آن گرمایش یا سرمایش توسط انتقال حرارت جابجایی وجود دارد بدست می آید.شکل کلی آن بترتیب در فرایند گرمایش و سرمایش بصورت زیر است که در آن x مکانی معلوم بوده که تبادل حرارتی در آن صورت می گیرد:

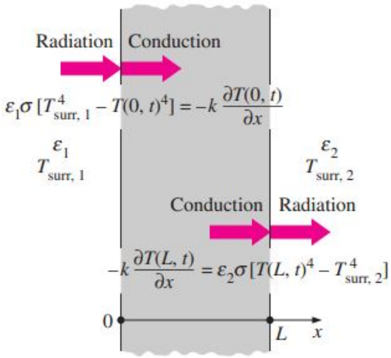
$$\boxed{\begin{aligned} -k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_x &= h[T_\infty - T(x,t)] \\ -k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_x &= h[T(x,t) - T_\infty] \end{aligned}}$$



۴- شرط مرزی تشعشع(Radiation Boundary Condition):

این حالت از موازنه انرژی در سطح ماده که در آن گرمایش یا سرمایش توسط انتقال حرارت تشعشعی وجود دارد بدست می آید.شکل کلی آن بترتیب در فرایند گرمایش و سرمایش بصورت زیر است که در آن X مکانی معلوم بوده که تبادل حرارتی در آن صورت می گیرد:

$$\boxed{\begin{aligned}-k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_x &= \varepsilon\sigma A[T_\infty^4 - T(x,t)^4]\\ -k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_x &= \varepsilon\sigma A[T(x,t)^4 - T_\infty^4]\end{aligned}}$$

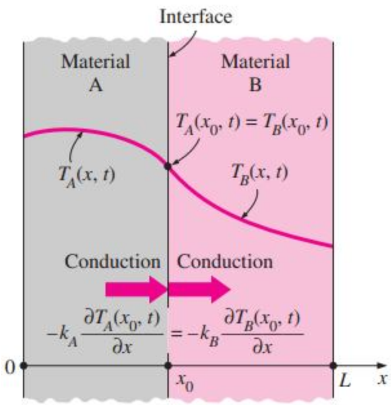


۵- شرط مرزی لایه مشترک(Interface Boundary Condition):

در لایه مشترک دو جسم A وB که در تماس با همند هم دما باید یکسان باشد و هم نرخ انتقال حرارت.بنابراین شرایط مرزی در لایه مشترک بصورت زیر خواهند بود:

$$\boxed{\begin{aligned}&T_A(x,t) = T_B(x,t)\\ &-k_A\frac{\partial T_A(x,t)}{\partial x} = -k_B\frac{\partial T_B(x,t)}{\partial x}\end{aligned}}$$

X مکان لایه مشترک است.

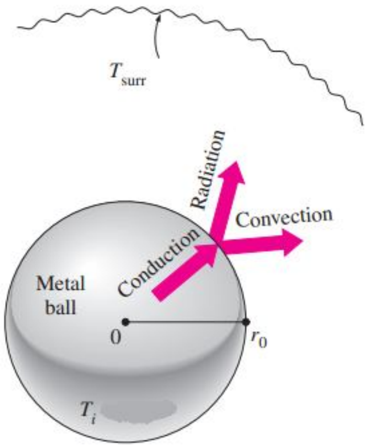


۶- شرط مرزی کلی (Generalized Boundary Condition):

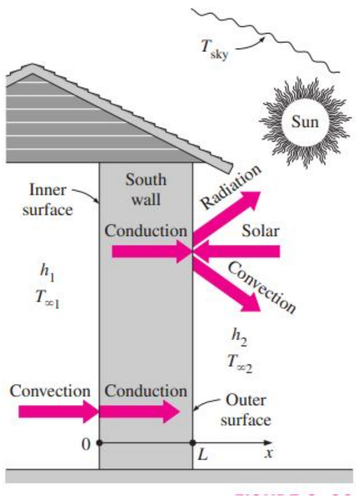
این شرط مرزی بیان می کند مجموع نرخ تمام حالتهای مختلف انتقال گرمایی که به یک سطح وارد می شوند باید برابر مجموع تمام نرخ انتقال حرارت هایی باشد که به صورتهای گوناگون از آن سطح خارج می شوند.شکل کلی آن بصورت زیر است:

$$\boxed{\sum q_i = \sum q_e}$$

بعنوان مثال در شکل زیر نرخ گرمای هدایتی که از درون به سطح کره می رسد باید برابر مجموع انتقال گرمایی باشد که بصورت جابجایی و تشعشع از سطح کره خارج می شود.



و یا در شکل پایین نرخ گرمایی که به شیوه جابجایی به وجه چپ دیوار می رسد باید برابر گرمایی باشد که به روش هدایتی وارد دیوار می شود.همچنین مجموع این گرمای هدایتی هنگامی که به وجه راست دیوار می رسد و گرمایی که از طرف خورشید به همان وجه می تابد باید با کل حرارتی که به روشهای تشعشعی و جابجایی از وجه راست به بیرون انتقال می یابد،برابر باشد.



تمرین

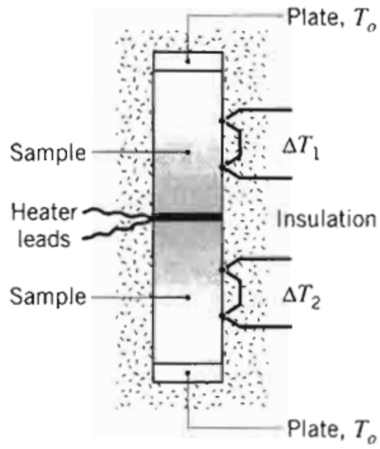
قسمتهایی از خط لوله آلاسکا از روی زمین رد شده و توسط میله های فولادی عمودی با ضریب هدایت گرمایی $25\frac{\text{W}}{\text{mK}}$ طول 1m و مساحت مقطع 0.005m^2 نگه داشته می شوند. در شرایط عادی تغییر دما در امتداد میله با عبارت زیر بیان می شود:

$\text{T}(x) = 100 - 150\text{x} + 10\text{x}^2$ که در آن T برحسب سانتیگراد و x برحسب متر است. تغییرات دما در سطح مقطع میله ناچیز است. دما و نرخ هدایت گرما را در محل اتصال میله با خط لوله (x =0) و محل اتصال میله به زمین (x =1m) محاسبه کنید.

تمرین

در یک وسیله اندازه گیری ضریب هدایت گرمایی، از یک گرمکن الکتریکی استفاده شده است که بین دو نمونه یکسان به قطر 30mm و طول 60mm قرار گرفته است. این دو نمونه نیز بین دو صفحه که دمای ثابت $T_o = 77°C$ توسط گردش سیال در آنها تأمین می شود، پرس شده اند.ترموکوپل های تفاضلی به فاصلهٔ 15mm در نمونه ها کار گذاشته شده اند. وجوه جانبی نمونه ها عایقکاری شده اند که این عمل باعث یک بعدی شدن انتقال گرما در نمونه ها می گردد.

- الف) اگر جنس نمونه ها از فولاد زنگ نزن 316 باشد مصرف گرمکن در 100V برابر 0.353A بوده و ترموکوپلها مقدار $\Delta T_1 = \Delta T_2 = 25°C$ را نشان خواهند داد. ضریب هدایت گرمایی جنس نمونه ها چقدر است؟ دمای متوسط نمونه ها را بیابید.



- ب) اگر نمونه پایینی با نمونه ای از جنس آهن آرمکو تعویض شود در این حالت مصرف گرمکن برابر 0.601A در 100V می باشد و ترموکوپلها مقدار $\Delta T_1 = \Delta T_2 = 15°C$ را نشان می دهند. ضریب هدایت گرمایی و دمای متوسط را در نمونه آهنی پیدا کنید.

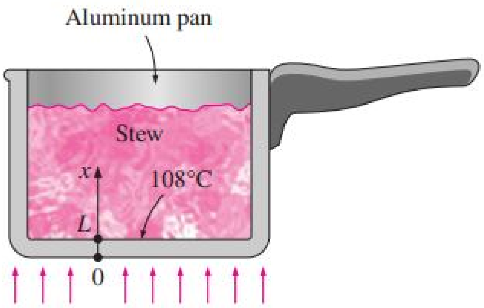
تمرین

یک سیستم یک بعدی به جرم M که روی یک گرمکن الکتریکی قرار دارد با خواص ثابت و بدون تولید داخلی گرما ابتدا در دمای یکنواخت T_i قرار دارد. انرژی منتقل شده از گرمکن الکتریکی باعث بوجود آمدن شار گرمای q''_o در سطح پایینی(x = 0) می شود. مرزهای سیستم در x = L و بقیه سطوح کاملاً عایقکاری شده اند. معادله دیفرانسیل مربوطه را نوشته و شرایط مرزی و اولیه را که برای تعیین دما برحسب زمان و مکان در سیستم لازم اند مشخص کنید،نیازی به حل معادله نیست.

تمرین

از یک قابلمه آلومینیومی مطابق شکل زیر برای پختن غذا استفاده می شود.ضخامت صفحه پایینی قابلمه L=0.25cm است.هیتر الکتریکی که به عنوان منبع گرمایی استفاده می شود توان 900W مصرف می کند که 90% آن جذب کف قابلمه می شود.دمای سطح

داخلی قابلمه 108C اندازه گیری شده است.انتقال حرارت را یک بعدی و دائمی در نظر گرفته و معادله دیفرانسیل توزیع دما را همراه با شرایط مرزی مناسب بنویسید.

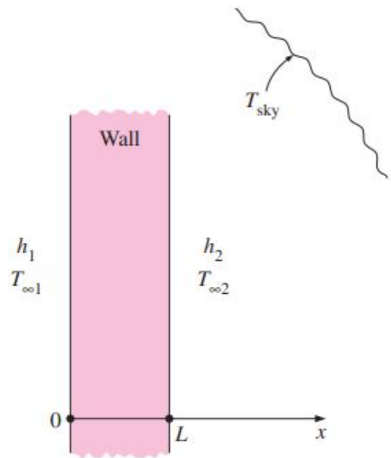


تمرین

یک دیوار مسطح که یک سطح آن (x = 0) عایقکاری شده است ابتدا در دمای یکنواخت T_i قرار دارد. سطح دیگر در مرز x = L ناگهان به دمای T_s رسانده می شود.معادله دیفرانسیل توزیع دما را با فرض یک بعدی بودن انتقال حرارت نوشته و شرایط مرزی و اولیه ای را که برای حل معادله لازم است،تعیین کنید.به حل معادله نیازی نیست.

تمرین

وجه داخلی دیوار شکل زیر در مجاورت هوایی به دمای $T_{\infty 1}$ و ضریب جابجایی h_1 قرار دارد.در وجه خارجی آن هوایی به دمای $T_{\infty 2}$ و ضریب جابجایی h_2 می وزد.انتقال حرارت به شیوه تشعشع و جابجایی از وجه خارجی دیوار به محیط اطراف مبادله می شود.اگر دمای محیط بیرون T_{sky} و ضریب صدور سطح خارجی دیوار ε باشد و دیوار ابتدائا در دمای $T_{\infty 1}$ قرار داشته باشد، معادله دیفرانسیلی توزیع دما را نوشته و شرایط اولیه و مرزی آن را تعیین کنید. انتقال حرارت را دائمی و یک بعدی فرض کنید.



3

فصل سوم: هدایت گرمایی (Conduction)

در ابتدا حالتی از هدایت را در نظر می گیریم که در آن پخش گرما در یک بعد صورت می گیرد در چنین حالتی گرادیان دما فقط در امتداد یکی از محورهای مختصات وجود دارد.

دیوار مسطح(Plane Wall)

در حالت کلی برای یک دیوار مسطح به ضخامت L و دماهای سطوح T_1 و T_2 که در مجاورت سیالهایی به دماهای $T_{\infty 1}$ و $T_{\infty 2}$ وجود دارد معادله انتقال حرارت($\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{\dot{q}}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$) برای حالت دائم و یک بعدی و بدون تولید انرژی گرمایی بصورت زیرساده می شود:

$$\frac{d^2T}{dx^2}=0$$

شرایط مرزی این مساله عبارتند از:

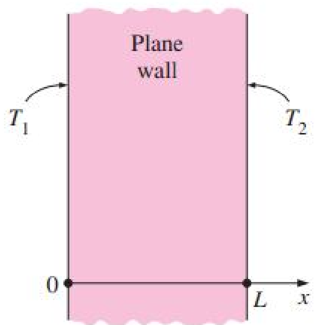
$$at \quad x=0: T=T_1$$
$$at \quad x=L: T=T_2$$

معادله فوق بصورت زیر حل می شود:

$$\frac{d^2T}{dx^2}=0 \Rightarrow \frac{dT}{dx}=C_1 \Rightarrow T(x)=C_1x+C_2$$

$$at \quad x=0: T=T_1 \Rightarrow T_1=C_2$$
$$at \quad x=L: T=T_2 \Rightarrow T_2=C_1L+C_2$$

$$\boxed{T(x)=(T_2-T_1)\frac{x}{L}+T_1}$$



رابطه فوق بیانگر این است که در هدایت یک بعدی و دائم و بدون تولید گرما در دیوار مسطح، دما بصورت خطی با x تغییر می کند.

نرخ انتقال گرما و شار حرارتی بصورت زیر بدست می آید:

$$q_x=-kA\frac{dT}{dx}=-k\frac{A}{L}(T_2-T_1) \qquad q''_x=\frac{q}{A}=-\frac{k}{L}(T_2-T_1)$$

مقاومت گرمایی (Thermal Resistance)

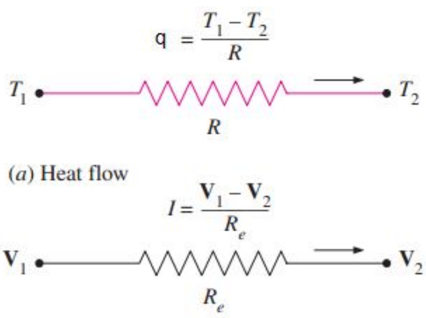
همچون مقاومت الکتریکی که با هدایت الکتریکی ارتباط دارد، مقاومت گرمایی نیز با هدایت گرمایی رابطه دارد.می توان نرخ انتقال گرما را معادل جریان الکتریکی در نظر گرفت در این صورت اختلاف دمای بین دو نقطه که باعث انتقال حرارت می شود معادل اختلاف پتانسیل خواهد بود که باعث ایجاد جریان الکتریکی در یک مدار برقی می شود.از مدارهای برقی می دانیم که مقاومت الکتریکی از رابطه زیر بدست می آید:

$$R = \frac{\Delta V}{I}$$

که صورت کسر همان اختلاف پتانسیل و مخرج آن شدت جریان الکتریکی است در نتیجه معادل این رابطه در انتقال حرارت بصورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{R = \frac{\Delta T}{q}}$$

در این رابطه صورت کسر اختلاف دما و مخرج،نرخ انتقال حرارت است.



(a) Heat flow

(b) Electric current flow

R مقاومت گرمایی نام دارد که با توجه به روابط می توان مقدار آن را در اشکال مختلف انتقال حرارت بدست آورد:

$$q = kA\frac{\Delta T}{L}, \quad R = \frac{\Delta T}{q} \Rightarrow \boxed{R_{cond} = \frac{L}{Ak}}$$

$$q = hA\Delta T, \quad R = \frac{\Delta T}{q} \Rightarrow \boxed{R_{conv} = \frac{1}{hA}}$$

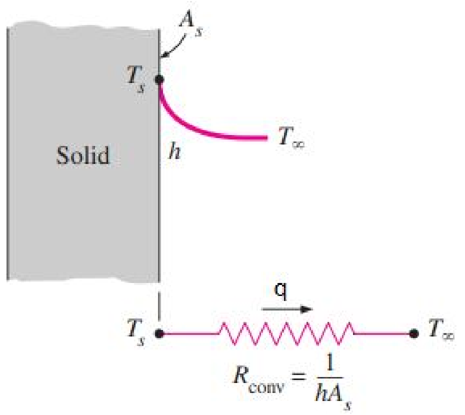
$$q = h_r A\Delta T, \quad R = \frac{\Delta T}{q} \Rightarrow \boxed{R_{rad} = \frac{1}{h_r A}}$$

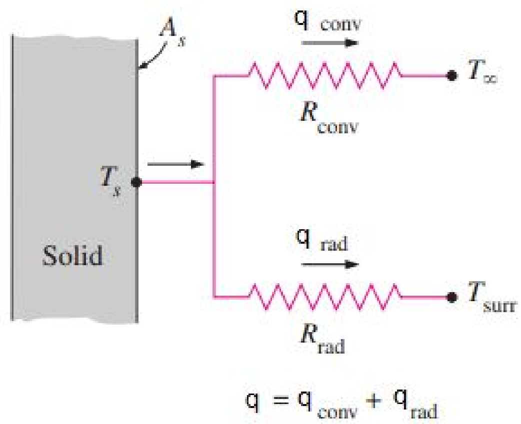
می توان با استفاده از مدار معادل گرمایی (Equivalent Thermal Circuit) نرخ انتقال گرما را بدست آورد.

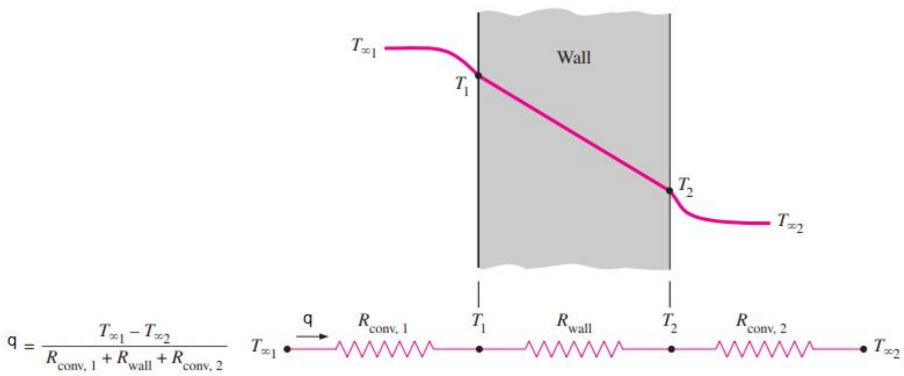
$$\boxed{q = \frac{\Delta T}{R_{tot}}}$$

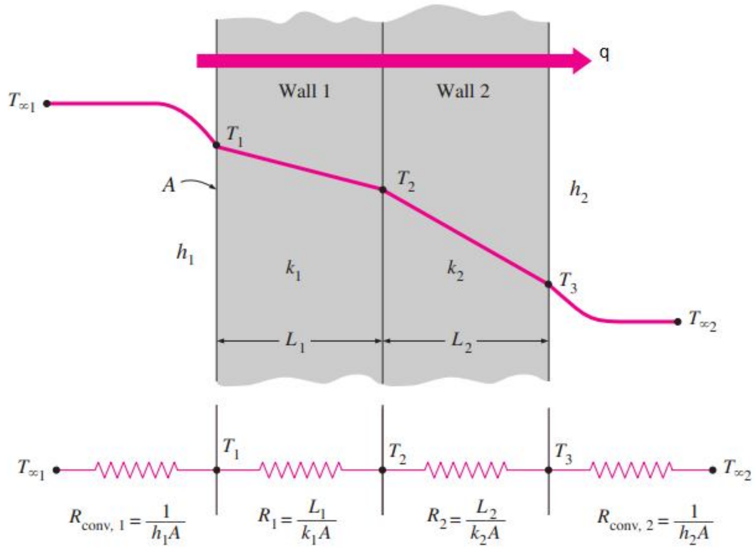
که R_{tot} مقاومت معادل بین دو نقطه ای است که اختلاف دمای آنها ΔT است.

در حالتی که مقاومتها بطور سری بهم متصل باشند مقاومت معادل برابر مجموع مقاومتها خواهد بود و در حالتی که مقاومتها بصورت موازی بهم متصل باشند(مثلا در جاییکه تشعشع و جابجایی هر دو وجود داشته باشد مقاومتهای آنها همیشه بصورت موازی خواهد بود) عکس مقاومت معادل برابر مجموع معکوسهای مقاومتها است.در شکل های زیر مدارهای گرمایی چند حالت مختلف نشان داده شده است:









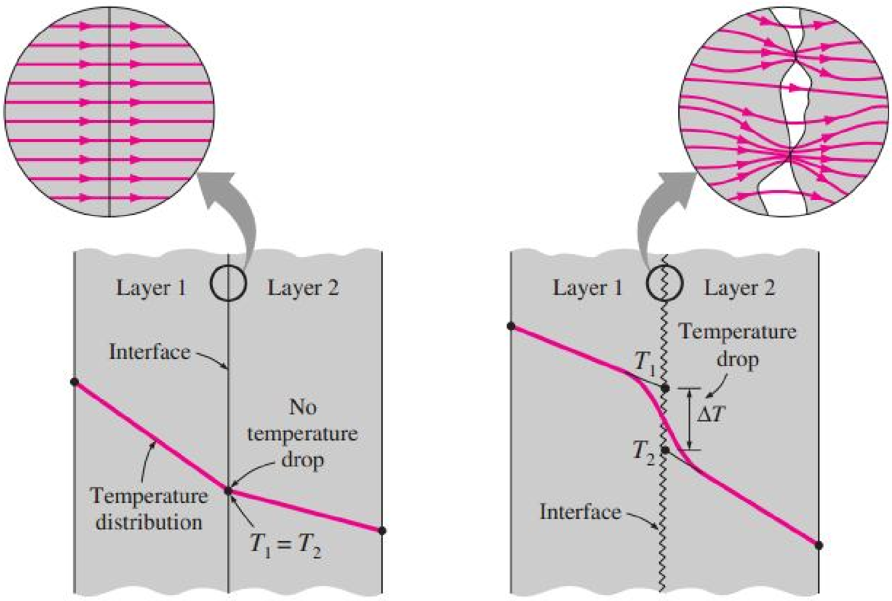
ضریب انتقال گرمای کلی(Overall Heat Transfer Coefficient)

ضریب انتقال گرمای کلی (U) بصورت زیر تعریف می شود: $U=\frac{1}{R_{tot}A}$ در نتیجه:

$$\boxed{q=UA\Delta T}$$

مقاومت سطح تماس(Contact Resistance)

بعلت زبری سطوح تماس، در نقاط تماس شکاف هایی پر از هوا وجود دارد که انتقال حرارت به شیوه تشعشع و یا هدایت از بین این شکاف ها صورت می گیرد.در شکل سمت چپ حالت ایدال تماس بین دوجسم که هیچگونه خلل و فرجی وجود نداشته باشد و در شکل سمت راست حالت واقعی سطح تماس نشان داده شده است.



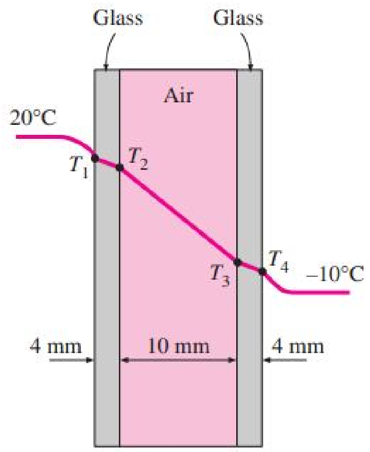
(*a*) Ideal (perfect) thermal contact (*b*) Actual (imperfect) thermal contact

مقاومت سطح تماس که بصورت $R''_{t,c}=\frac{T_A-T_B}{q''_x}$ تعریف می شود بسته به جنس دیواره در جداولی داده شده است.

در جامدات مقاومت سطح تماس را می توان با افزایش مساحت سطح تماس کاهش داد. همچنین اگر ضریب هدایت سیال زیاد باشد، مقاومت سطح تماس کاهش پیدا می کند. غالباً بمنظور کاهش مقاومت تماس از فلزات نرم و گریس های گرمایی استفاده می شود مانند سرب، قلع، نقره و بابیت.

تمرین

پنجره دو جداره ای به ارتفاع 0.8m و پهنای 1.5m از دو لایه شیشه ای(k=0.78W/mC) به ضخامت4mm که بین آنها لایه ای هوای ساکن(k=0.026W/mC) به ضخامت10mmقرار دارد، تشکیل شده است.نرخ انتقال گرما و دماهای سطوح داخلی و خارجی و دماهای لایه های مشترک پنجره را بیابید.فرض کنید دمای اتاق20C و دمای هوای سرد بیرون-10C و ضریب انتقال حرارت جابجایی هوای داخل و خارج بترتیب$h_1=10W/m^2C$ و $h_2=40W/m^2C$ باشد.



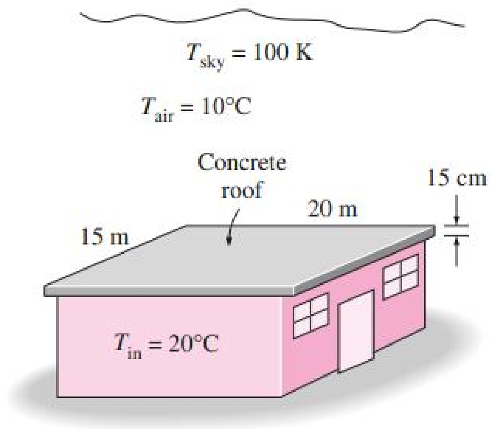
تمرین

دیوار مرکبی را در نظر بگیرید که از دو ماده به ضرایب هدایت $k_A = 1\frac{W}{mK}$ و $k_B = 0.4\frac{W}{mK}$ و ضخامتهای $L_A = 10mm$ و $L_B = 20mm$ تشکیل شده است. مقاومت سطح تماس در سطح مشترک دو ماده $3\frac{m^2.K}{W}$ اندازه گیری شده است مادهٔ A با سیالی به دمای 200°C و ضریب جابجائی $h = 10\frac{W}{m^2K}$ و مادهٔ B با سیالی به دمای 40°C و ضریب جابجائی $h = 20\frac{W}{m^2K}$ در تماس است.

نرخ انتقال گرما را در این دیوار به ارتفاع 2m و عرض 2.5m بدست آورید.توزیع دما را رسم کنید.

تمرین

سقف یک خانه از یک لایه بتنی(k=2W/mC) به ضخامت15cm، طول 20m و عرض15m تشکیل شده است.ضرایب انتقال حرارت جابجایی روی سطوح داخلی و خارجی سقف بترتیب$5W/m^2C$ و$12W/m^2C$ است.در یک شب صاف زمستانی دمای هوا10C گزارش شده است در حالیکه دمای آسمان100k می باشد.خانه و تمام سطوح داخلی آن در دمای ثابت20C قرار دارند و ضریب صدور سطح سقف بتنی0.9 است.اثرات تشعشع و جابجایی را در نظر گرفته و نرخ انتقال حرارت از سقف و دمای سطح داخلی سقف را تعیین کنید.



4

استوانه(Cylinder)

در فصل گذشته دیدیم معادله کلی پخش گرما برای استوانه بصورت زیر است:

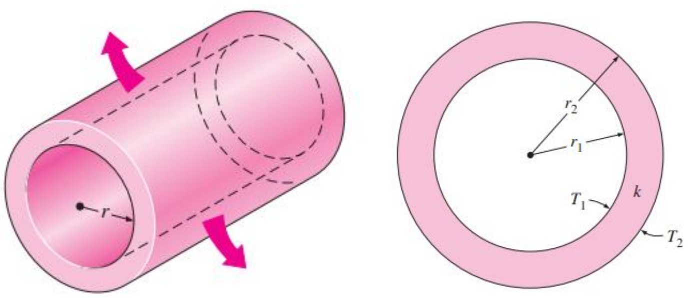
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(kr\frac{\partial T}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}(k\frac{\partial T}{\partial \phi})+\frac{\partial}{\partial z}(k\frac{\partial T}{\partial z})+\dot{q}=\rho C_P\frac{\partial T}{\partial t}$$

معادله توزیع دمای یک بعدی بدون تولید گرما و شرایط دائم در استوانه بصورت زیر ساده خواهد شد:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(kr\frac{dT}{dr})=0$$

شرایط مرزی معادله فوق را می توان بصورت معلوم بودن دماهای سطح داخلی و خارجی استوانه در نظر گرفت:

$$at \quad r=r_1 : T=T_1$$
$$at \quad r=r_2 : T=T_2$$



حل معادله دیفرانسیلی فوق بصورت زیر است:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(kr\frac{dT}{dr})=0 \Rightarrow \frac{d}{dr}(kr\frac{dT}{dr})=0 \Rightarrow kr\frac{dT}{dr}=C \Rightarrow \frac{dT}{dr}=\frac{C}{kr}=\frac{C_1}{r}$$

که در آن $C_1=\frac{C}{k}$

$$\frac{dT}{dr}=\frac{C_1}{r} \Rightarrow dT=\frac{C_1}{r}dr \Rightarrow \int dT=C_1\int\frac{dr}{r} \Rightarrow T(r)=C_1\ln r+C_2$$

با اعمال شرایط مرزی:

$$at \quad r=r_1 : T=T_1 \Rightarrow T_1=C_1\ln r_1+C_2$$
$$at \quad r=r_2 : T=T_2 \Rightarrow T_2=C_1\ln r_2+C_2$$

پس از تعیین ثابتها و جایگذاری به رابطه توزیع دمای زیر می رسیم:

$$\boxed{T(r)=\frac{T_1-T_2}{\ln\frac{r_1}{r_2}}\ln\frac{r}{r_2}+T_2}$$

دیده می شود که در یک استوانه توزیع دما در انتقال حرارت هدایتی بشکل لگاریتمی است.

نرخ انتقال حرارت در استوانه بصورت زیر بدست می آید:

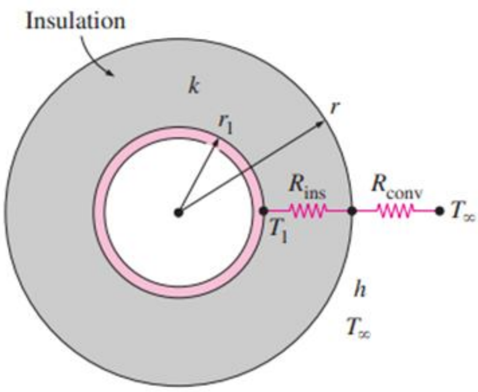
$$q_r = -kA\frac{dT}{dr} = -k(2\pi rL)\frac{dT}{dr} = \frac{2\pi Lk(T_1 - T_2)}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

چون $q = \frac{\Delta T}{R}$ در نتیجه مقاومت هدایتی برای استوانه برابر خواهد بود با:

$$\boxed{R = \frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2\pi Lk}}$$

ضخامت بهینه عایق(Optimum Insulation Thickness)

هرچند با افزایش ضخامت عایق، مقاومت هدایتی افزایش می یابد ولی مقاومت جابجایی بواسطه افزایش سطح خارجی کاهش پیدا می کند بنابراین چنین بنظر می رسد که یک ضخامت بهینه عایق در سیستم های شعاعی وجود دارد. ضخامت عایق هنگامی اتلاف گرما را به کمترین مقدار خواهد رساند که مقاومت کلی در برابر انتقال گرما به بیشترین مقدار برسد.برای محاسبه ضخامت بهینه عایق استوانه ای بشعاع r_1 و بطول L را در نظر بگیرید که عایقی به ضخامت $r - r_1$ دور آن را گرفته باشد و استوانه و عایق در معرض سیالی با دمای T_∞ و جابجایی h قرار گرفته باشد با رسم مدار گرمایی معادل:



$$R_{tot} = \frac{\ln\frac{r}{r_1}}{2\pi Lk} + \frac{1}{2\pi rLh}$$

$$q = \frac{T_1 - T_\infty}{R_{tot}}$$

ضخامت بهینه عایق هنگامی حاصل می شود که R_{tot} نسبت به r بیشترین مقدار را داشته باشد:

$$\frac{dR_{tot}}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi Lkr} - \frac{1}{2\pi r^2Lh} = 0 \Rightarrow r = \frac{k}{h}$$

برای تعیین اینکه نتیجه فوق مقاومت کل را بیشترین یا کمترین مقدار می کند باید مشتق دوم را محاسبه نمود:

$$\frac{d^2R_{tot}}{dr^2} = -\frac{1}{2\pi kLr^2} + \frac{1}{\pi r^3 Lh}$$

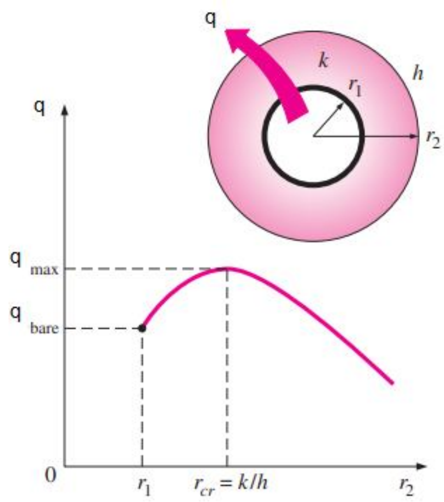
با جایگذاری $r = \frac{k}{h}$ در عبارت مشتق دوم خواهیم داشت:

$$\frac{d^2R_{tot}}{dr^2} = -\frac{1}{2\pi kL(\frac{k}{h})^2} + \frac{1}{\pi(\frac{k}{h})^3 Lh} = -\frac{h^2}{2\pi Lk^3} + \frac{h^2}{\pi Lk^3} = \frac{h^2}{2\pi Lk^3} > 0$$

اما چون مشتق دوم همواره مثبت است لذا r_{cr} شعاع عایقی است که مقاومت کل را به کمترین مقدار نه بیشترین مقدار می رساند لذا ضخامت بهینه عایق وجود ندارد.این شعاع به شعاع بحرانی عایق(Critical Insulation Redius) معروف است.

$$\boxed{r_{cr} = \frac{k}{h}}$$

مطابق نمودار زیر با افزایش ضخامت عایق ابتدا انتقال حرارت بجای کاهش،افزایش می یابد زیرا مقاومت جابجایی بدلیل افزایش مساحت که در مخرج کسر قرار دارد($R_{conv} = \frac{1}{hA}$) کاهش می یابد و در نتیجه انتقال حرارت افزایش می یابد روند رو به رشد انتقال گرما تا شعاع بحرانی(r_{cr}) ادامه می یابد و پس از آن بدلیل غالب شدن نقش مقاومت هدایتی بر مقاومت جابجایی مقدار انتقال حرارت کاهش می یابد.



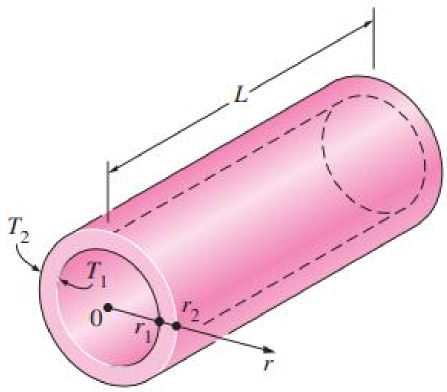
تمرین

یک استوانه طویل و توخالی با ضریب هدایت k و شعاعهای داخلی و خارجی r_i و r_0 مفروض است. دمای سطح داخلی در T_i نگه داشته می شود و سطح خارجی در معرض شار گرمای یکنواخت q''_0 قرار دارد.

- الف) با شکل مناسب معادله پخش گرما شروع کرده، عبارتی برای توزیع دمای $T(r)$ برحسب T_i، k، r_0، r_i و q''_0 بدست آورید.
- ب) عبارتی برای نرخ گرما بر واحد طول استوانه در سطح داخلی آن برحسب q''_0 و متغیرهای هندسی استوانه بدست آورید.

تمرین

یک لوله بخار به طول $L=20m$،شعاع داخلی $r_1=6cm$،شعاع خارجی $r_2=8cm$ و ضریب هدایت گرمایی $k=20W/mC$ را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید.سطوح داخلی و خارجی لوله بترتیب در دماهای $T_1=150C$ و $T_2=60C$ نگهداری شده اند.معادله توزیع دمایی را با فرض دائمی بودن انتقال حرارت حل کرده و نرخ انتقال گرمای بخار به محیط را بدست آورید.



کره(Sphere)

معادله پخش گرما برای یک کره بصورت زیر است:

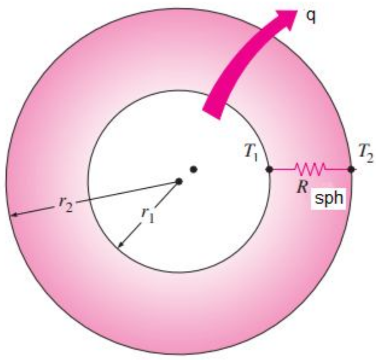
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(kr^2\frac{\partial T}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(k\frac{\partial T}{\partial\phi})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(k\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta})+\dot{q}=\rho C_P\frac{\partial T}{\partial t}$$

بنابراین معادله توزیع دمای یک بعدی بدون تولید گرما و شرایط دائم در کره به شکل زیر در خواهد آمد:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(kr^2\frac{dT}{dr})=0$$

شرایط مرزی معادله فوق را می توان بصورت معلوم بودن دماهای سطح داخلی و خارجی کره فرض کرد:

$$at \quad r=r_1 : T=T_1$$
$$at \quad r=r_2 : T=T_2$$



حل معادله دیفرانسیلی فوق بصورت زیر است:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(kr^2\frac{dT}{dr})=0\Rightarrow\frac{d}{dr}(kr^2\frac{dT}{dr})=0\Rightarrow kr^2\frac{dT}{dr}=C\Rightarrow\frac{dT}{dr}=\frac{C}{kr^2}=\frac{C_1}{r^2}$$

که در آن $C_1=\frac{C}{k}$

$$\frac{dT}{dr}=\frac{C_1}{r^2}\Rightarrow dT=\frac{C_1}{r^2}dr\Rightarrow\int dT=C_1\int\frac{dr}{r^2}\Rightarrow T(r)=-\frac{C_1}{r}+C_2$$

با اعمال شرایط مرزی:

$$at\quad r=r_1:T=T_1\Rightarrow T_1=-\frac{C_1}{r_1}+C_2$$
$$at\quad r=r_2:T=T_2\Rightarrow T_2=-\frac{C_1}{r_2}+C_2$$

پس از تعیین ثابتها و جایگذاری به رابطه توزیع دمای زیر می رسیم:

$$\boxed{T(r)=T_1-(T_1-T_2)[\frac{1-(r_1/r)}{1-(r_1/r_2)}]}$$

نرخ انتقال حرارت در کره بصورت زیر بدست می آید:

$$q_r=-kA\frac{dT}{dr}=-k(4\pi r^2)\frac{dT}{dr}=\frac{4\pi k(T_1-T_2)}{(1/r_1)-(1/r_2)}$$

چون $q=\frac{\Delta T}{R}$ در نتیجه مقاومت هدایتی برای کره برابر خواهد بود با:

$$\boxed{R=\frac{1}{4\pi k}(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2})}$$

تمرین

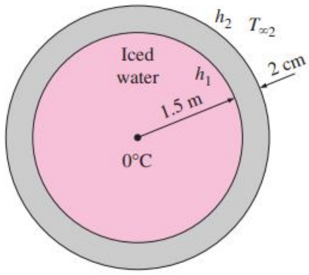
سطح خارجی یک کره توخالی به شعاع r_2 در معرض شار گرمای یکنواخت q'' قرار دارد. سطح داخلی به شعاع r_1 در دمای ثابت T_{s1} نگه داشته می شود. عبارتی برای توزیع دمای $T(r)$ در دیواره کره برحسب q''، T_{s1}، r_1 و r_2 و ضریب هدایت گرمایی دیواره k بدست آورید.

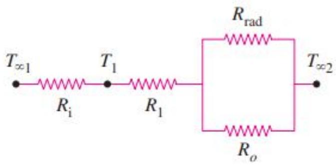
تمرین

یک مخزن کروی به قطر3m و ضخامت 2cm که از فولاد ضدزنگ(k=15W/mC) ساخته شده است برای ذخیره آب یخ $T_{\infty 1}=0C$ بکار می رود.مخزن در اتاقی واقع شده که دمای هوای آن $T_{\infty 2}=22C$ بوده و دیواره های اتاق همه در22C ثابت

نگهداشته شده اند.سطح خارجی مخزن سیاه بوده و انتقال حرارت بین سطح خارجی مخزن و محیط اطراف توسط جابجایی آزاد و تشعشع انجام می شود.اگر ضرایب جابجایی در سطوح داخلی و خارجی کره بترتیب $h_1=80W/m^2C$ و $h_2=10W/m^2C$ باشد،

- الف)نرخ انتقال حرارت به یخ را بدست آورید.
- ب)چه مقدار یخ در دمای صفر درجه در مدت ۲۴ ساعت ذوب می شود؟





هدایت با تولید انرژی گرمایی

انرژی گرمایی ممکن است بواسطه تبدیل انواع دیگر انرژی در داخل جسم تولید شود، مانند تبدیل انرژی الکتریکی به انرژی گرمایی در یک جسم حامل جریان الکتریسیته و یا گرمای ایجاد شده توسط تشعشعات هسته ای در یک مخزن. بطور کلی اگر تولید توان $\dot{E}_g$ بطور یکنواخت در ماده ای به حجم V صورت گیرد نرخ تولید بر واحد حجم $\left(\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{m}^3}\right)$ عبارتست از: $\dot{q}=\frac{\dot{E}_g}{V}$

تولید گرما در دیوار مسطح(یک بعدی و شرایط دائم)

با فرض تولید گرما در شرایط دائمی و یک بعدی از معادله کلی پخش گرما تنها جملات اول و چهارم وجود خواهند داشت:

$$\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{\dot{q}}{k}=0$$

که برای حل آن به دو شرط مرزی نیاز است.مبدا مختصات را وسط دیوار در نظر گرفته و فرض می کنیم ضخامت دیوار $2L$ و شرایط مرزی بصورت زیر باشد:

$$at \quad x=-L:T=T_1$$
$$at \quad x=L:T=T_2$$

معادله دیفرانسیل حاکم بر مساله بصورت زیر حل می شود:

$$\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{\dot{q}}{k}=0 \Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2}=-\frac{\dot{q}}{k} \Rightarrow \frac{dT}{dx}=-\frac{\dot{q}}{k}x+C_1 \Rightarrow T(x)=-\frac{\dot{q}}{2k}x^2+C_1x+C_2$$

ثابتها با اعمال شرایط مرزی بدست می آیند:

$$at \qquad x=-L: T=T_1 \Rightarrow T_1=-\frac{\dot{q}}{2k}(-L)^2+C_1(-L)+C_2$$

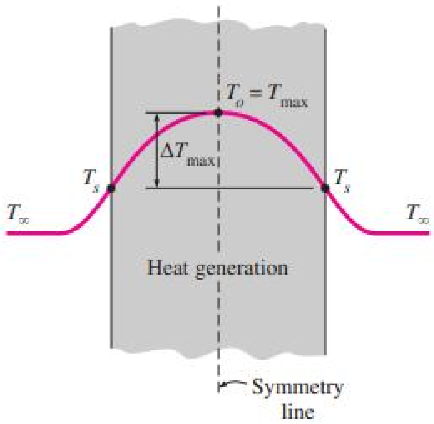
$$at \qquad x=L: T=T_2 \Rightarrow T_2=-\frac{\dot{q}}{2k}L^2+C_1(L)+C_2$$

پس از تعیین ثابتها و جایگذاری،رابطه زیر برای توزیع دما در این حالت (دائمی،یک بعدی همراه با تولید گرما) بدست می آید:

$$\boxed{T(x)=\frac{\dot{q}L^2}{2k}(1-\frac{x^2}{L^2})+\frac{T_2-T_1}{2}\frac{x}{L}+\frac{T_1+T_2}{2}}$$

در حالتی که دمای دو وجه دیوار با هم برابر باشند که این حالت هنگامی پیش می آید که سیالهای دو طرف دیوار ضرایب جابجایی برابر و دمای یکسان($T_1=T_2=T_s$) داشته باشند(مطابق شکل) رابطه فوق بصورت زیر ساده می شود:

$$T(x)=\frac{\dot{q}L^2}{2k}(1-\frac{x^2}{L^2})+T_s$$



می توان ثابت کرد در این حالت لایه میانی بیشترین دما را دارد که از رابطه زیر بدست می آید:

$$T(0)=T_o=\frac{\dot{q}L^2}{2k}+T_s$$

همچنین می توان مقدار دمای هر لایه را بر حسب دمای لایه میانی بدست آورد:

$$\frac{T(x)-T_o}{T_s-T_o}=(\frac{x}{L})^2$$

تمرین

یکی از سطوح (x=0) دیوار تختی با ضریب هدایت k در معرض تشعشع مایکروویو قرار دارد که منجر به تولید گرمایش حجمی تحت رابطه زیر می شود: $\dot{q}(x)=\dot{q}_0\left(1-\frac{x}{L}\right)$ که در آن $\dot{q}_0$ ثابت است. مرز دیوار در x=L کاملاً عایقکاری شده ولی سطح آن در x=0 در دمای ثابت T_0 قرار دارد. توزیع دمای T(x) را برحسب $x, L, k, \dot{q}_0$ و T_0 تعیین کنید.

تمرین

یک دیوار یک بعدی متشکل از سه لایهA($L_A = 30\text{mm}$ $k_A = 25\frac{W}{mk}$)،B($L_B = 60\text{mm}$) وC($L_C = 20\text{mm}$ $k_C = 50\frac{W}{mk}$) را در نظر بگیرید. سطوح خارجی دیوار با سیالی به دمای 25C و ضریب جابجایی$1000W/m^2C$ در تماس اند.در دیوار میانی B، گرمای یکنواخت $\dot{q}_B$ تولید می شود ولی در دیوارهای A و C تولید گرما وجود ندارد دمای سطوح تماس بین لایه های A وB 261 درجه سانتیگراد وبین لایه های B وC 211 درجه سانتیگراد هستند.با فرض اینکه مقاومت تماس بین سطوح ناچیز باشد مقدار تولید گرما به واحد حجم $\dot{q}_B$ و هدایت گرمایی k_B را بدست آورید.

دقت داشته باشید در حالتی که در جسمی تولید گرما وجود داشته باشد نمی توان برای آن جسم از مدارهای گرمایی استفاده کرد.

5

تولید گرما در استوانه(یک بعدی و شرایط دائم)

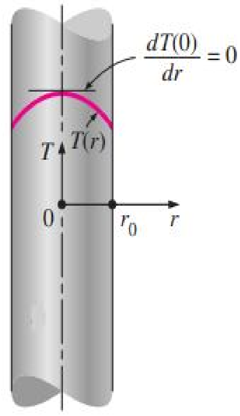
در حالت کلی معادله پخش گرما در مختصات استوانه ای بصورت زیر است:

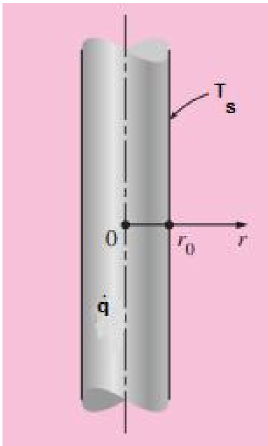
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(kr\frac{\partial T}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}(k\frac{\partial T}{\partial \phi})+\frac{\partial}{\partial z}(k\frac{\partial T}{\partial z})+\dot{q}=\rho C_P\frac{\partial T}{\partial t}$$

درشرایط دائم و یک بعدی همراه با تولید گرما معادله دیفرانسیل زیر باید حل شود:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(kr\frac{dT}{dr})+\dot{q}=0$$

فرض می کنیم دما در سطح استوانه(r_0)برابر T_sباشد.





حل معادله فوق این چنین است:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(kr\frac{dT}{dr})+\dot{q}=0 \Rightarrow \frac{d}{dr}(kr\frac{dT}{dr})+\dot{q}r=0 \Rightarrow \frac{d}{dr}(r\frac{dT}{dr})+\frac{\dot{q}r}{k}=0 \Rightarrow \frac{d}{dr}(r\frac{dT}{dr})=-\frac{\dot{q}r}{k} \Rightarrow$$

$$r\frac{dT}{dr}=-\frac{\dot{q}r^2}{2k}+C_1 \Rightarrow \frac{dT}{dr}=-\frac{\dot{q}r}{2k}+\frac{C_1}{r} \Rightarrow T(r)=-\frac{\dot{q}r^2}{4k}+C_1\ln r+C_2$$

برای تعیین ثابتها نخست می دانیم در مرکز استوانه دما نمی تواند بینهایت شود و چون

$$\lim_{r \to 0} \ln r=\infty$$

در نتیجه C_1 باید برابر صفر باشد.

از طرف دیگردما در سطح استوانه(r_0)برابر T_s است،در نتیجه:

$$C_2=T_s+\frac{\dot{q}r_0^2}{4k}$$

با جایگذاری:

$$\boxed{T(r)=\frac{\dot{q}r_0^2}{4k}[1-(\frac{r}{r_0})^2]+T_s}$$

بدلیل تقارن، در مرکز استوانه دما ماکزیمم است.دمای ماکزیمم برابراست با:

$$T_0=\frac{\dot{q}r_0^2}{4k}+T_s$$

می توان دمای هر لایه را بر حسب دمای ماکزیمم نوشت:

$$\frac{T(r)-T_s}{T_0-T_s}=1-(\frac{r}{r_0})^2$$

حال اگر موازنه انرژی را بنویسیم دمای سطح استوانه بر حسب دمای سیال بدست می آید:

$$\dot{q}(\pi r_0^2L)=h(2\pi r_0L)(T_s-T_\infty)\Rightarrow T_s=T_\infty+\frac{\dot{q}r_0}{2h}$$

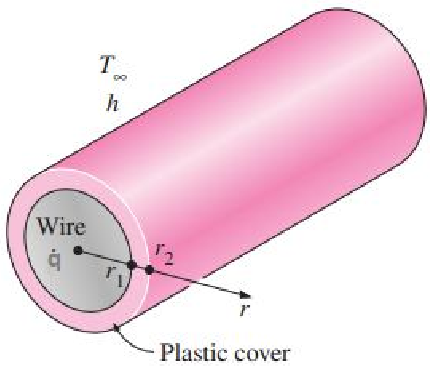
تمرین

یک پوسته استوانه ای به شعاع های داخلی r_i و r_0 از ماده ای پر شده است که گرمای یکنواخت را با نرخ $\dot{q}$ بر واحد حجم تولید می کند سطح داخلی دارای عایق بوده و سطح خارجی پوسته در معرض سیالی به دمای T_∞ و ضریب جابجایی h قرار دارد.

- الف) عبارتی برای توزیع دمای دائم T(r) در پوسته برحسب r_i،r_0،$\dot{q}$،h،T_∞ و ضریب هدایت جنس پوسته، k بدست آورید.
- ب) عبارتی برای نرخ گرما در شعاع خارجی پوسته برحسب $\dot{q}$ و ابعاد پوسته تعیین کنید.

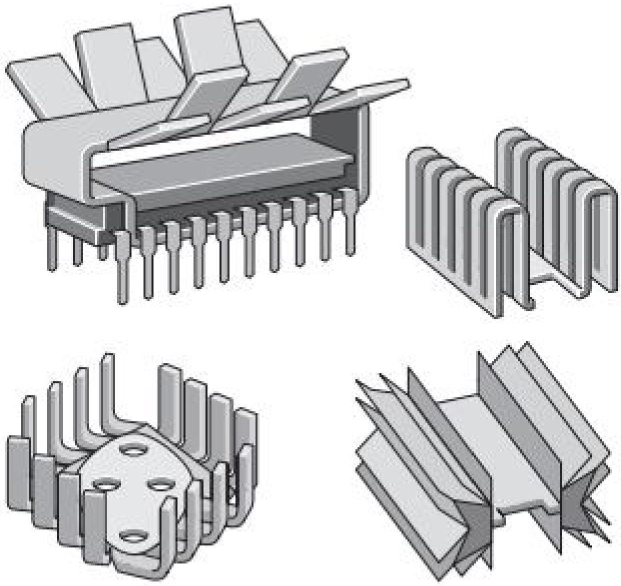
تمرین

یک سیم مقاومتی بلند به شعاع r_1=0.3cm و ضریب هدایتی18W/mCحرارت یکنواختی با شدت $1.5W/cm^3$تولید می کند.سیم درون یک لایه ضخیم پلاستیکی به ضخامت0.4cm و ضریب هدایت1.8W/mCفرو رفته است.سطح بیرونی پوشش پلاستیکی در معرض هوایی با دمای25C و ضریب جابجایی $14W/m^2C$ قرار دارد.انتقال حرارت را یک بعدی در نظر گرفته و دما را در مرکز سیم و در لایه مشترک سیم با پوشش پلاستیکی بیابید.



انتقال گرما از سطح گسترش یافته (Extended Surface)

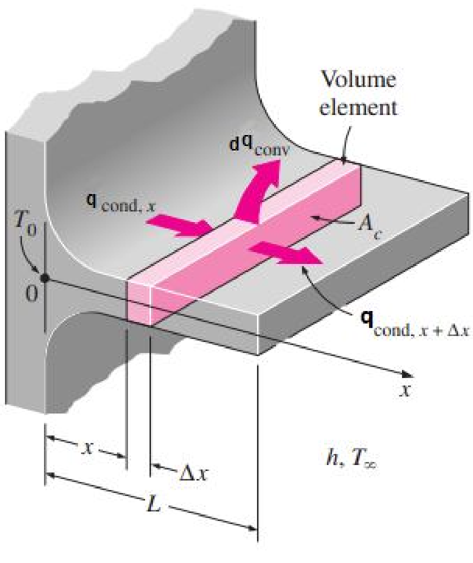
سطح گسترش یافته به سطحی گفته می شود که در آن انتقال حرارت توسط هدایت در داخل سطح و جابجایی و تشعشع بین سطح و محیط صورت گیرد. غالباً سطوح گسترش یافته برای افزایش نرخ انتقال گرما بین یک جسم و سیال مجاور بکار می روند. سطوح گسترش یافته را پره (Fin) نیز می نامند.



از پره ها در سرمایش بدنه موتورسیکلتها، ماشین های چمن زنی، ترانسفورماتورها، ژنراتوربها و شوفاژها استفاده می شود. پره ها انواع مختلفی دارند از قبیل پره مستقیم (Straight Fin)، پره شعاعی یا حلقوی (Annular Fin)، پره سوزنی (Pin Fin) و ...

تجزیه و تحلیل انتقال حرارت در پره ها

المانی از پره را در نظر گرفته،انتقال حرارت را یک بعدی فرض کرده و از اثرات تشعشع چشمپوشی می کنیم.



معادله بقای انرژی را برای المان می نویسیم:

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{conv}$$

اما از بسط تیلور می دانیم:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{dq_x}{dx}dx$$

از قانون فوریه به یاد داریم:

$$q_x = -kA_c\frac{dT}{dx}$$

در نتیجه:

$$q_{x+dx} = -kA_c\frac{dT}{dx} + \frac{d}{dx}\left(-kA_c\frac{dT}{dx}\right)dx = -kA_c\frac{dT}{dx} - k\frac{d}{dx}\left(A_c\frac{dT}{dx}\right)dx$$

همچنین:

$$dq_{conv} = hdA_s(T - T_\infty)$$

با جایگذاری در معادله بقای انرژی:

$$-kA_c\frac{dT}{dx} = -kA_c\frac{dT}{dx} - k\frac{d}{dx}\left(A_c\frac{dT}{dx}\right)dx + hdA_s(T - T_\infty)$$

که بصورت زیر ساده می شود:

$$-k\frac{d}{dx}\left(A_c\frac{dT}{dx}\right)dx + hdA_s(T - T_\infty) = 0$$

با تقسیم بر kdx- به معادله زیر می رسیم:

$$\frac{d}{dx}\left(A_c\frac{dT}{dx}\right) - \frac{h}{k}\frac{dA_s}{dx}(T - T_\infty) = 0$$

و پس از دیفرانسیل گیری و تقسیم بر A_C

$$\boxed{\frac{d^2T}{dx^2} + \left(\frac{1}{A_c}\frac{dA_c}{dx}\right)\frac{dT}{dx} - \left(\frac{1}{A_c}\frac{h}{k}\frac{dA_s}{dx}\right)(T - T_\infty) = 0}$$

معادله دیفرانسیل فوق،معادله کلی حاکم بر پره ها نامیده می شود.

پره با مساحت سطح مقطع یکنواخت(Fins of Uniform Cross-Sectional Area)

اکنون بمنظور سهولت و کاربرد بیشتر حالتی را در نظر می گیریم که سطح مقطع پره یکنواخت باشد، محیط را P و سطح مقطع یکنواخت را که انتقال حرارت هدایتی از آن طریق صورت می گیرد A_c و مساحت پیرامونی را که انتقال گرمای جابجایی از این سطح انجام می شود A_s فرض می کنیم.

$A_s = Px \, , A_c = \text{constant}$

$A_s = Px \Rightarrow \frac{dA_s}{dx} = P \; , \quad \frac{dA_c}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA_c}(T - T_\infty) = 0$

برای حل معادله فوق فرض می کنیم $\theta(x) = T(x) - T_\infty$ وآن را دمای اضافی (Excess Temperature)می نامیم.در نتیجه:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{d\theta}{dx}$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{d^2\theta}{dx^2}$$

$\frac{hP}{kA_c}$ چون یک مقدار مثبت است آن را m^2 می نامیم.با جایگذاری در معادله دیفرانسیل ساده شده فوق:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$$

جواب معادله فوق در حالت کلی بصورت زیر است:

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

محاسبه C_1 و C_2:

بدیهی است ثابتهای C_1 و C_2 از شرایط مرزی حاکم بر مساله بدست می آیند.فرض کنیم دما در پایه پره (x=0) معلوم باشد این دما راT_b می نامیم:

$$T(0) = T_b \;\Rightarrow\; \theta(0) = T(0) - T_\infty = T_b - T_\infty = \theta_b$$

شرط دوم در نوک پره (x=L) بیانگر یکی از چهار حالت فیزیکی است که در عمل روی میدهد و با انجام محاسبات ریاضی توزیع دما و نرخ انتقال گرما بصورت زیر بدست می آید:

اگر انتقال گرمای جابجایی در نوک پره وجود داشته باشد:($h\theta(L) = -k\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L}$)

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{T - T_\infty}{T_b - T_\infty} = \frac{\cosh m(L-x) + \frac{h}{mk}\sinh m(L-x)}{\cosh mL + \frac{h}{mk}\sinh mL}$$

$$q_f = M\frac{\sinh mL + \frac{h}{mk}\cosh mL}{\cosh mL + \frac{h}{mk}\sinh mL} \qquad M = (hPkA_c)^{\frac{1}{2}}(T_b - T_\infty) \qquad m^2 = \frac{hP}{kA_c}$$

اگر نوک پره آدیاباتیک باشد($\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} = 0$):

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{T - T_\infty}{T_b - T_\infty} = \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL} \qquad q_f = M\tanh mL$$

اگردمای نوک پره معلوم باشد($\theta(L) = \theta_L$):

$$\frac{\theta}{\theta_b}=\frac{T-T_\infty}{T_b-T_\infty}=\frac{\frac{\theta_L}{\theta_b}\sinh mx+\sinh m(L-x)}{\sinh mL}$$

$$q_f = M\frac{Cos\,hmL-\frac{\theta_L}{\theta_b}}{\text{Sin h mL}}$$

اگر پره طویل باشد($mL \geq 2.65$):

$$\frac{\theta}{\theta_b}=\frac{T-T_\infty}{T_b-T_\infty}=e^{-mx} \qquad q_f = M$$

کارایی پره(Fin Performance)

کارایی پره بصورت نسبت نرخ انتقال گرما با پره به نرخ انتقال گرما بدون پره تعریف می شود.

$$\boxed{\varepsilon_f=\frac{q_f}{hA_{c,b}\theta_b}}$$

مثلاً برای پره خیلی طویل: $\varepsilon_f=\left(\frac{kP}{hA_c}\right)^{\frac{1}{2}}$

ε_f غالباً باید از 2 بزرگتر باشد تا استفاده از پره صرفه اقتصادی داشته باشد.

مقاومت پره(Fin Resistance)

مقاومت هدایتی پره بصورت زیر تعریف می شود:

$$R_{t,f}=\frac{T_b-T_\infty}{q_f}$$

مقاومت گرمایی پایه پره (مقاومت جابجایی پره) را هم می توان بصورت زیر تعریف کرد:

$$R_{t,b}=\frac{1}{hA_{c,b}}$$

در نتیجه کارایی پره بر حسب این دو مقاومت بصورت زیر تعریف می شود:

$$\boxed{\varepsilon_f=\frac{R_{t,b}}{R_{t,f}}}$$

بنابراین برای افزایش ε_f کاهش نسبت مقاومت هدایتی به جابجایی پره ضروری است و اگر پره بخواهد انتقال گرما را زیاد کند، مقاومت آن نباید از مقاومت پایه پره تجاوز نماید.

6

راندمان پره(Fin Efficiency)

راندمان پره بصورت زیر تعریف می شود:

$$\boxed{\eta_f = \frac{q_f}{q_{\max}} = \frac{q_f}{hA_f\theta_b}}$$

که در آن A_f مساحت سطح پره است.کاملا بدیهی است:$0 \le \eta_f \le 1$

در پره با سطح یکنواخت و نوک آدیاباتیک راندمان پره را می توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$\eta_f = \frac{M\tanh mL}{hPL\theta_b} = \frac{\tanh mL}{mL}$$

برای تعیین انتقال گرما از پره مستقیم و مستطیلی و با شرط جابجائی در نوک پره به کمک طول اصلاح شده(Corrected Length)می توان از رابطه زیر که دقت بالایی دارد استفاده کرد:

$$L_c = L + \left(\frac{t}{2}\right) \qquad q_f = M\tanh mL_c$$

اگر عرض پره خیلی بزرگتر از ضخامت آن باشد($w \gg t$):

$$w \gg t \Rightarrow P \approx 2w \Rightarrow mL_c = \left(\frac{hP}{kA_c}\right)^{\frac{1}{2}} L_c = \left(\frac{2wh}{kwt}\right)^{\frac{1}{2}} L_c = \left(\frac{2h}{kt}\right)^{\frac{1}{2}} L_c \qquad A_P = L_c t \Rightarrow t = \frac{A_P}{L_c} \Rightarrow$$

$$mL_c = \left(\frac{2h}{kA_P}\right)^{\frac{1}{2}} L_c^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \eta_f = L_c^{\frac{3}{2}}\left(\frac{h}{kA_P}\right)^{\frac{1}{2}}$$

مشخصات هندسی انواع پره ها بصورت زیر است:

مستطیلی:

$$A_f = 2wL_c$$
$$L_c = L + \frac{t}{2}$$
$$A_p = L_c t$$

مثلثی:

$$A_f = 2w[L^2 + (\frac{t}{2})^2]^{\frac{1}{2}}$$
$$L_c = L$$
$$A_p = \frac{Lt}{2}$$

سهموی:

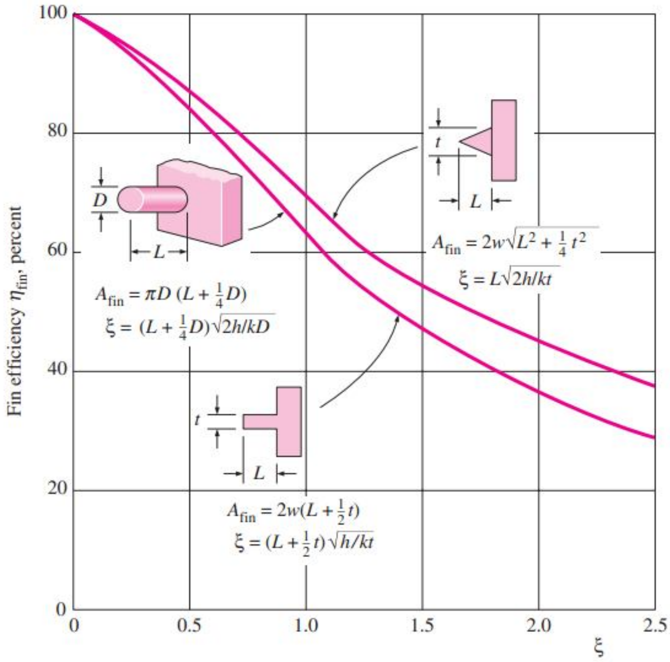
$$A_f = 2.05w[L^2 + (\frac{t}{2})^2]^{\frac{1}{2}}$$

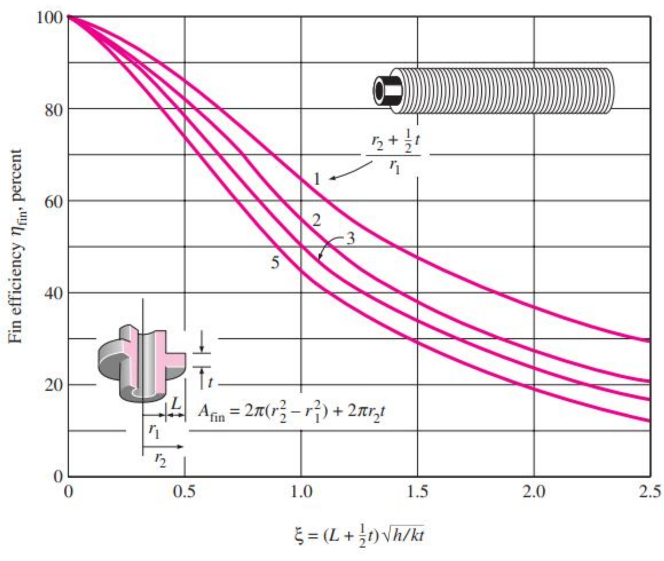
$$L_c = L$$
$$A_p = \frac{Lt}{3}$$

حلقوی:

$$A_f = 2\pi(r_{2c}^2 - r_1^2)$$
$$r_{2c} = r_2 + \frac{t}{2}$$
$$L_c = L + \frac{t}{2}$$
$$A_p = L_c t$$

از روی نمودارهای زیر با توجه به ابعاد هندسی و شکل پروفیل پره می توان راندمان آن را بدست آورد.





دقت داشته باشید نمودارهای فوق در مجموعه نمودارها و جداول مهم انتقال حرارت موجود در کتابخانه وبلاگ وجود ندارد.

راندمان کلی سطح(Ovreall Surface Efficiency)

راندمان کلی سطح، عملکرد آرایشی از پره ها را همره با سطح اصلی اتصال پره ها مشخص می کند. راندمان کلی بصورت زیر تعریف می شود:

$$\boxed{\eta_o = \frac{q_t}{q_{\max}} = \frac{q_t}{hA_t\theta_b}}$$

q_t: نرخ کلی گرما

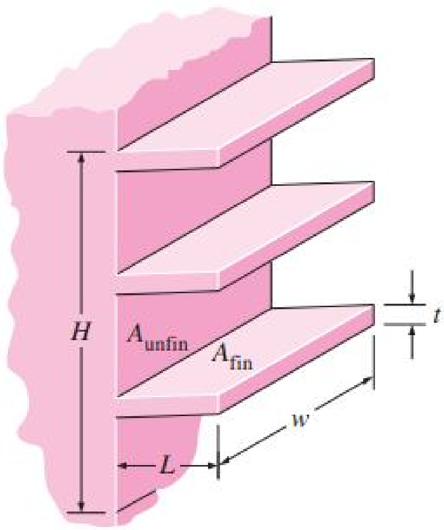
A_t: مجموع سطوح پره دار و بدون پره

$$A_t = A_f + A_b$$

$$q_t = hA_b\theta_b + hA_f\eta_f\,\theta_b = h\left[(A_t - A_f) + A_f\eta_f\,\right]\theta_b = hA_t\left[1 - \frac{A_f}{A_t}\left(1 - \eta_f\,\right)\right]\theta_b \Rightarrow$$

$$\boxed{\eta_o = 1 - \frac{A_f}{A_t}(1 - \eta_f)}$$

رابطه فوق راندمان کلی سطح را برحسب راندمان پره نشان میدهد.



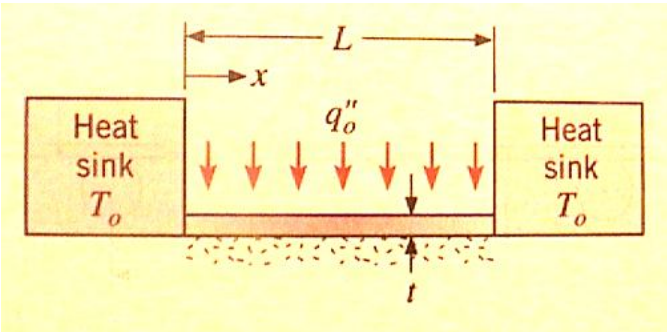
مقاومت سطح تماس پره(Thermal Contact Resistance of Fin)

اگر پره ها بصورت ماشینکاری شده قرار گرفته باشند مقاومت سطح تماس وجود نخواهد داشت ولی معمولاً پره ها بصورت پیش ساخته نصب می شوند در چنین حالتی باید اثرات مقاومت گرمایی سطح تماس $(R_{t,c})$ را در نظر گرفت که تأثیر نامطلوبی بر عملکرد گرمایی پره بجا می گذارد.

تمرین

یک صفحه نازک بطول L، ضخامت t و عرض $w \ll L$ به دو چاه گرمایی با دمای ثابت T_0 متصل شده است. سطح پائینی صفحه کاملاً عایق کاری شده ولی شار گرمای خالص q''_0 به طور یکنواخت روی سطح بالایی می تابد.

- الف) معادله دیفرانسیلی که توزیع دمای دائم در صفحه $T(x)$ را تعیین می کند بدست آورید.
- ب) معادله فوق را برای توزیع دما حل کرده و عبارتی برای نرخ انتقال گرما از صفحه به چاه های گرمایی بدست آورید.



تمرین

دمای یک سر میله ای به طول L برابر T_0 بوده وانتهای آن عایق است.این میله در معرض محیطی به دمای T_∞ و ضریب جابجایی h قرار گرفته است. در داخل میله المانی حرارتی الکتریکی قرار دارد که در طول میله حرارتی با آهنگ $\dot{q}$ تولید می کند. یک عبارت

- الف) برای توزیع دما در میله
- ب) برای حرارت منتقل شده به محیط بدست آورید.

تمرین

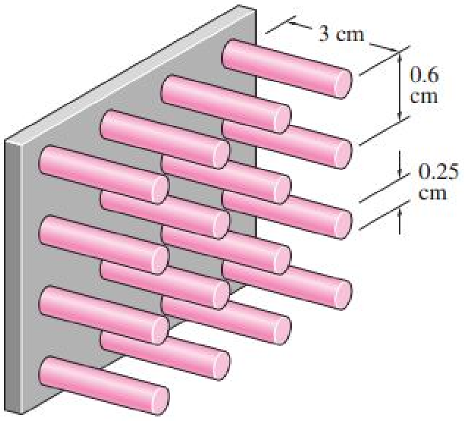
پره های آلومینیومی با مقطع مثلثی به یک دیوار مسطح به دمای 250°C وصل شده اند. ضخامت پای پره 2mm و طول آن 6mm است. این سیستم در هوای محیط به دمای 20°C و ضریب جابجایی سطحی $40\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2k}}$ قرار دارد.

- الف) راندمان و کارایی پره را تعیین کنید.
- ب) گرمای منتقل شده بر واحد عرض یک پره چقدر است؟

تمرین

یک سطح داغ به دمای 100C با اتصال یک سری پره های سوزنی به طول 3cm و قطر 0.25cm که از آلومینیوم (k=237W/mC) ساخته شده اند،خنک می شود.فاصله مرکز تا مرکز هر دو پره 0.6cm است.دمای محیط اطراف 20C و ضریب انتقال حرارت جابجایی $35\,\mathrm{W/m^2C}$ است.

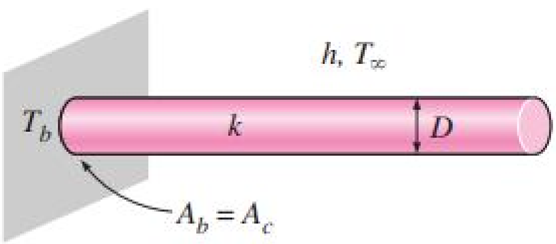
- الف)نرخ انتقال حرارت از سطح را برای یک صفحه به ابعاد یک متر در یک متر بیابید.
- ب)راندمان کلی سطح را بدست آورید.

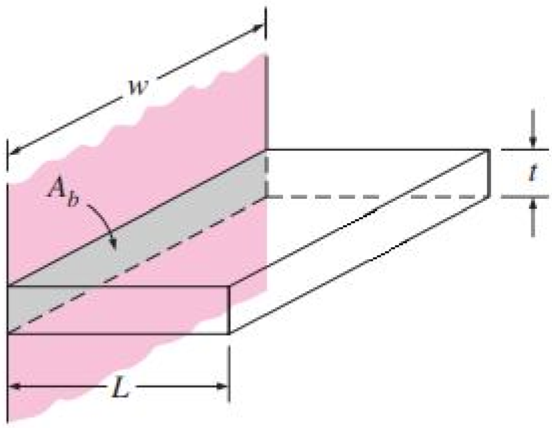


تمرین

رابطه ای برای راندمان یک پره با سطح مقطع ثابت Ac، محیط P، طول L و ضریب هدایت گرمایی k که در معرض محیطی به دمای T_∞ با ضریب جابجایی h قرار دارد بیابید.فرض کنید پره به اندازه کافی بلند است بطوریکه دمای پره در انتهای آن با دمای سیال برابر است.دمای پره را در پایه T_b فرض کنید و از انتقال حرارت از انتهای آن صرفنظر کنید.رابطه بدست آمده را برای

- الف) یک پره دایره ای به قطر D
- ب) یک پره مستطیلی به ضخامت t ساده کنید.





7

هدایت گرمایی دائم و دوبعدی(Two-Dimensional Steady Conduction)

تابحال مسائل هدایت گرمایی را تنها در یک بعد بررسی کردیم.فرض یک بعدی اگرچه مساله را بسیار ساده می کند ولی مسائلی وجود دارد که این فرض اعتبار خود را در آنها از دست می دهد مثلا انتقال حرارت در یک صفحه مستطیلی که ابعاد آن نسبت به هم قابل ملاحظه اند دو بعدی است و نمی توان از فرض یک بعدی استفاده کرد.

اکنون حالتی را بررسی می کنیم که انتقال گرما در دو بعد صورت گیرد. روشهای مختلفی برای تحلیل این گونه مسائل وجود دارد که عبارتند از:

- روش تحلیلی
- روش ترسیمی(ضریب شکل)
- روش عددی

هر کدام از این روشها مزایا و نقاط ضعفی دارد.مثلا روش تحلیلی اگرچه دقت بسیار بالایی دارد و توزیع دما را بصورت صریح معلوم می کند ولی تنها برای مسائلی با هندسه معین قابل استفاده است.از طرف دیگر روش ترسیمی برای بسیاری مسائل عملی کاربرد دارد هرچند توزیع دما را معلوم نمی کند ولی نرخ انتقال حرارت را تعیین می کند.در روش عددی توزیع دما به دست نمی آید و حل بصورت گسسته خواهد بود علاوه بر آن این روش به کامپیوتر نیاز دارد.

در این جزوه بدلیل سادگی و قابل قبول بودن نتایج،تنها روش ضریب شکل بیان می شود.

ضریب شکل(Shape Factor)

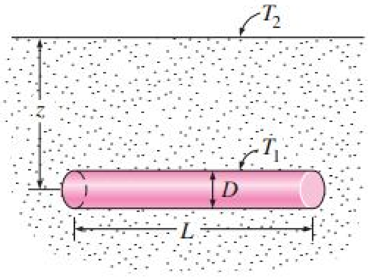
در این روش انتقال حرارت بین دو جسم از رابطه زیر بدست می آید:

$$\boxed{q = sk\Delta T}$$

در رابطه فوق k ضریب هدایت محیط بین دو جسم است که گرما از آن طریق عبور می کند و ΔT اختلاف دمای بین دو جسم است. s در این رابطه ضریب شکل نامیده می شود که به شدت تابع هندسه،ابعاد و آرایش قرار گیری دو جسم نسبت به هم است که رابطه آن برای بسیاری از آرایشها در جدول ضریب شکل داده شده است.

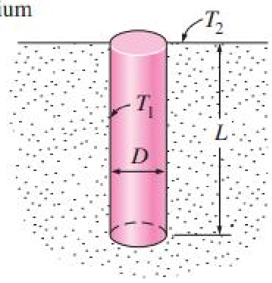
(1) Isothermal cylinder of length L buried in a semi-infinite medium ($L >> D$ and $z > 1.5D$)

$$S = \frac{2\pi L}{\ln(4z/D)}$$



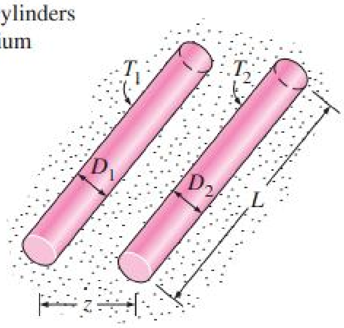
(2) Vertical isothermal cylinder of length L buried in a semi-infinite medium ($L >> D$)

$$S = \frac{2\pi L}{\ln(4L/D)}$$



(3) Two parallel isothermal cylinders placed in an infinite medium ($L >> D_1, D_2, z$)

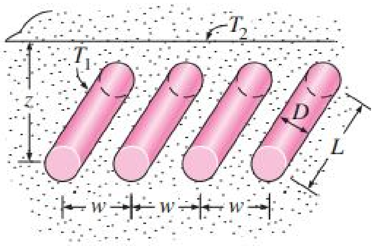
$$S = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\dfrac{4z^2 - D_1^2 - D_2^2}{2D_1D_2}\right)}$$



(4) A row of equally spaced parallel isothermal cylinders buried in a semi-infinite medium ($L >> D$, z and $w > 1.5D$)

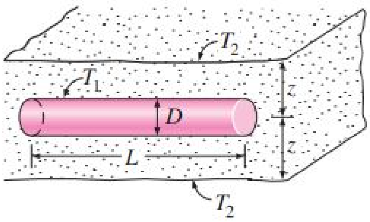
$$S = \frac{2\pi L}{\ln\left(\dfrac{2w}{\pi D}\sinh\dfrac{2\pi z}{w}\right)}$$

(per cylinder)



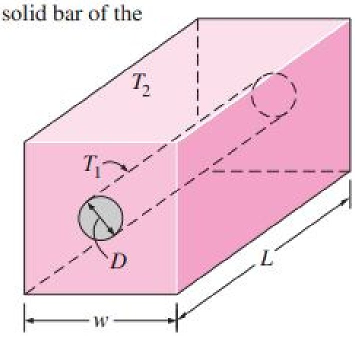
(5) Circular isothermal cylinder of length L in the midplane of an infinite wall ($z > 0.5D$)

$$S = \frac{2\pi L}{\ln(8z/\pi D)}$$



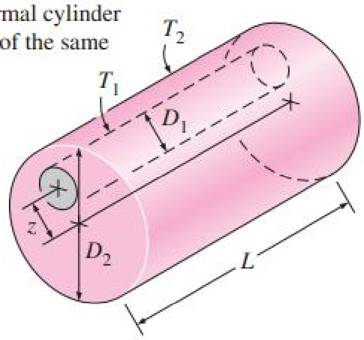
(6) Circular isothermal cylinder of length L at the center of a square solid bar of the same length

$$S = \frac{2\pi L}{\ln(1.08\,w/D)}$$



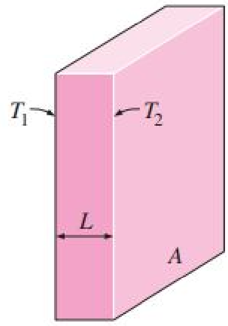
(7) Eccentric circular isothermal cylinder of length L in a cylinder of the same length ($L > D_2$)

$$S = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\dfrac{D_1^2 + D_2^2 - 4z^2}{2D_1D_2}\right)}$$



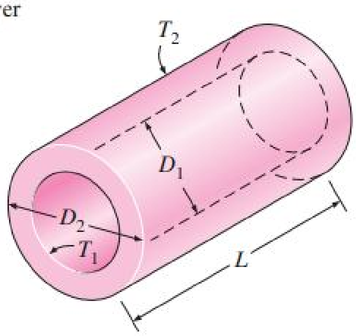
(8) Large plane wall

$$S = \frac{A}{L}$$



(9) A long cylindrical layer

$$S = \frac{2\pi L}{\ln(D_2/D_1)}$$



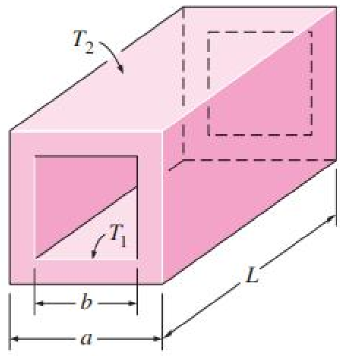
(10) A square flow passage

(a) For $a/b > 1.4$,

$$S = \frac{2\pi L}{0.93\ln(0.948\,a/b)}$$

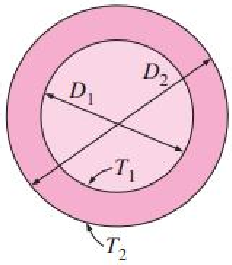
(b) For $a/b < 1.41$,

$$S = \frac{2\pi L}{0.785\ln(a/b)}$$



(11) A spherical layer

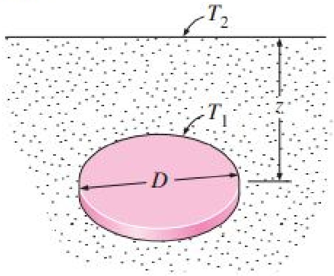
$$S = \frac{2\pi D_1 D_2}{D_2 - D_1}$$



(12) Disk buried parallel to the surface in a semi-infinite medium ($z >> D$)

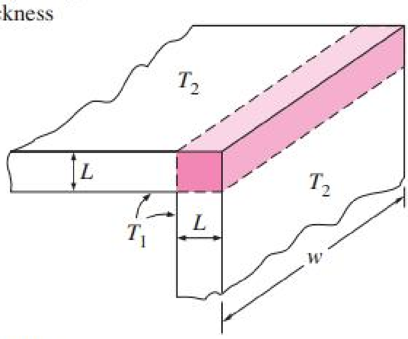
$$S = 4D$$

($S = 2D$ when $z = 0$)



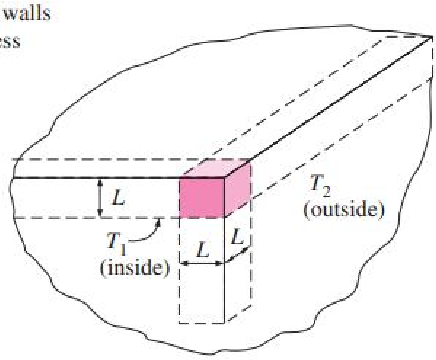
(13) The edge of two adjoining walls of equal thickness

$$S = 0.54\,w$$



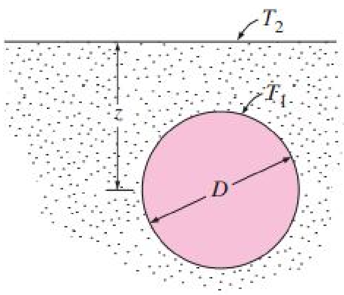
(14) Corner of three walls of equal thickness

$$S = 0.15\,L$$



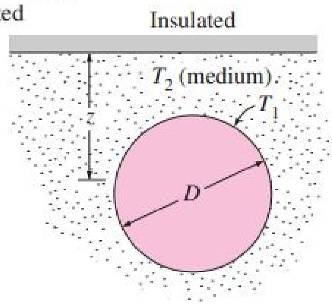
(15) Isothermal sphere buried in a semi-infinite medium

$$S = \frac{2\pi D}{1 - 0.25D/z}$$



(16) Isothermal sphere buried in a semi-infinite medium at T_2 whose surface is insulated

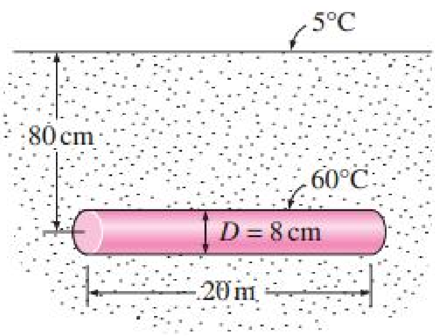
$$S = \frac{2\pi D}{1 + 0.25D/z}$$



دقت داشته باشید جدول فوق در مجموعه نمودارها و جداول مهم انتقال حرارت موجود در کتابخانه وبلاگ وجود ندارد.

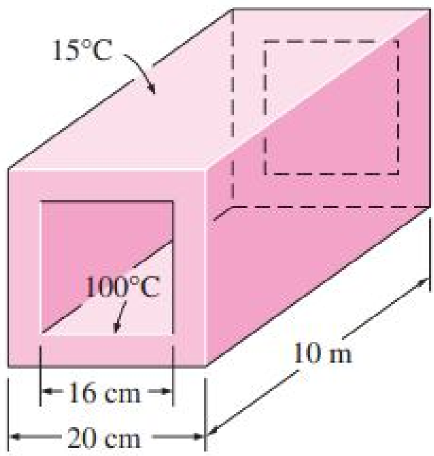
تمرین

یک لوله آب گرم به قطر 8cm و طول20m که برای استفاده در یک سیستم گرمایشی بکار می رود در عمق80 سانتیمتری زمین در خاک مدفون شده است.دمای سطح بیرونی لوله 60C است.اگر دمای سطح زمین5C و ضریب هدایت خاک در آن محل0.9W/mC باشد نرخ اتلاف گرما از لوله را بیابید.



تمرین

یک مجرای بتنی(k=0.75W/mC) دیوار ضخیم به طول10m که سطح مقطع مربعی دارد را در نظر بگیرید.ابعاد بیرونی مجرا20cm در20cm می باشند و ضخامت دیواره مجرا2cm است.اگر سطوح داخلی و خارجی مجرا بترتیب در100C و 15C باشند،نرخ انتقال حرارت از دیواره ها به مجرا را بدست آورید.

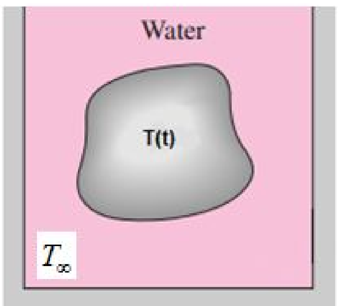


هدایت گرمایی گذرا(Transient Heat Conduction)

بسیاری از مسائل انتقال حرارت وابسته به زمان هستند.این مسائل که به مسائل گذرا معروفند هنگامی مطرح می شوند که شرایط مرزی ناگهان تغییر کند، در این حالت دما در هر نقطه از سیستم بتدریج تغییر خواهدکرد و بطورکلی دما علاوه بر مکان تابع زمان هم خواهد بود و جمله سمت راست معادله پخش دما صفر نخواهد بود.روشهای مختلفی برای بررسی این نوع مسائل وجود دارد که مهمترین و ساده ترین آنها روش ظرفیت گرمایی فشرده نام دارد.

روش ظرفیت گرمایی فشرده(The Lumped Capacitance Method)

جسمی را در نظر بگیرید که ابتدا در دمای یکنواخت T_i است.این جسم در سیالی با دمای $T_\infty < T_i$ فرو می رود.اگر فرض کنیم این اتفاق در زمان $t=0$ روی می دهد با گذشت زمان($t>0$) دمای جسم کاهش می یابد تا در نهایت به دمای سیال(T_∞)برسد.



این کاهش دما بدلیل انتقال حرارت جابجایی است که بین جسم و سیال روی داده است.در روش ظرفیت گرمایی فشرده فرض می شود دمای جسم در سراسر آن یکنواخت است و گرادیان دما وجود نداشته یا بسیار کم است به عبارتی دما تابع مکان نیست.این فرض در صورتی صحیح است که ضریب هدایت گرمایی جسم بسیار بالا و مقاومت هدایتی آن بسیار پایین باشد.

قانون بقای انرژی را برای این جسم می نویسیم:

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_g = \dot{E}_{st}$$

انرژی ورودی و تولیدی در اینجا وجود ندارد و بنابراین معادله بصورت زیر ساده می شود:

$$-\dot{E}_{out} = \dot{E}_{st}$$

انرژی گرمایی خروجی بصورت جابجایی است بنابراین:

$$\dot{E}_{out} = q_{conv} = hA(T - T_\infty)$$

در فصل اول نرخ انرژی ذخیره شده در ماده را بصورت زیر بیان کردیم:

$$\dot{E}_{st} = \rho CV \frac{dT}{dt}$$

با قرار دادن در معادله بقای انرژی:

$$-hA(T - T_\infty) = \rho CV \frac{dT}{dt}$$

اکنون باید این معادله را حل کنیم تا توزیع دما بدست آید.

$$-hA(T - T_\infty) = \rho CV \frac{dT}{dt} \Rightarrow \frac{dT}{T - T_\infty} = -\frac{hA}{\rho CV} dt \Rightarrow \int_{T_i}^{T} \frac{dT}{T - T_\infty} = -\frac{hA}{\rho CV} \int_0^t dt \Rightarrow$$

$$\ln(T - T_\infty)\Big|_{T_i}^{T} = -\frac{hA}{\rho CV} t \Rightarrow \ln\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = -\frac{hA}{\rho CV} t \Rightarrow t = -\frac{\rho CV}{hA} \ln\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{\rho CV}{hA} \ln\frac{T_i - T_\infty}{T - T_\infty}$$

$$\boxed{t = \frac{\rho CV}{hA} \ln\frac{T_i - T_\infty}{T - T_\infty}}$$

t در رابطه فوق مدت زمانی است که طول می کشد تا جسم از دمای اولیه T_i به دمای Tبرسد.

می توان رابطه فوق را چنین نوشت:

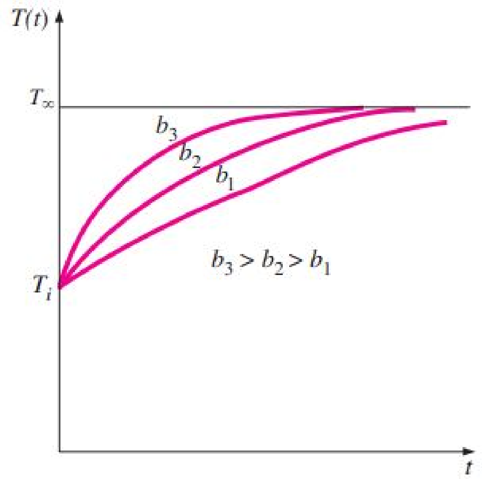
$$t = \frac{\rho CV}{hA} \ln\frac{T_i - T_\infty}{T - T_\infty} \Rightarrow \ln\frac{T_i - T_\infty}{T - T_\infty} = \frac{hA}{\rho CV} t \Rightarrow \frac{T_i - T_\infty}{T - T_\infty} = e^{\frac{hA}{\rho CV} t} \Rightarrow \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-\frac{hA}{\rho CV} t}$$

$$\boxed{\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp(-\frac{hA}{\rho CV} t)}$$

بکمک این رابطه دمای جسم در زمان مشخص t بدست می آید.

$\frac{\rho CV}{hA}$ را ثابت زمانی(Time Constant) می نامند.ثابت زمانی مدت زمانی است که طول می کشد تا شرایط تعادل حاکم شود یعنی دمای جسم به دمای سیال میل کند.بالا بودن ثابت زمانی به این مفهوم است که جسم در برابر تغییرات شرایط گرمایی آهسته تر پاسخ می دهد و پایین بودن ثابت زمانی به معنای سریع پاسخ دادن جسم به تغییرات شرایط گرمایی است.

ثابت زمانی را با حرف τ و عکس آن را با حرف bنشان می دهند.



معیار استفاده از روش ظرفیت گرمای فشرده

برای اینکه بتوان از روش ظرفیت گرمای فشرده استفاده کرد باید گرادیان دما در داخل جسم ناچیز باشد طوریکه بتوان فرض کرد دما تابعی از مکان نیست و این در صورتی است که مقاومت هدایتی جسم در مقایسه با مقاومت جابجایی بسیار کم باشد.طبق تعریف نسبت مقاومت هدایتی به مقاومت جابجایی را عدد بیو(Biot Number) می نامند که یک عدد بدون بعد است.

$$Bi = \frac{R_{cond}}{R_{conv}} = \frac{\frac{L}{Ak}}{\frac{1}{hA}} = \frac{hL}{k}$$

L در این رابطه طول مشخصه جسم می باشد برای دیوار تخت برابر ضخامت دیوار،برای استوانه نصف شعاع($\frac{r_0}{2}$) و برای کره،یک سوم شعاع($\frac{r_0}{3}$) در نظر گرفته می شود.

اگر عدد بیو کمتر از 0.1 باشد،در آن صورت می توان با دقت قابل قبولی از روش ظرفیت گرمای فشرده استفاده کرد.در این حالت دما فقط تابع زمان بوده و تقریبا مستقل از مکان است.اگر وابستگی دما به مکان مهم باشد نباید از روش ظرفیت گرمای فشرده استفاده کرد در این حالت از روشهای عددی و یا از نمودارهای هایسلر استفاده می شود که در این جزوه به بررسی آنها نخواهیم پرداخت.

می توان رابطه $\frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty} = \exp(-\frac{hA}{\rho CV}t)$ را بصورت زیر نوشت:

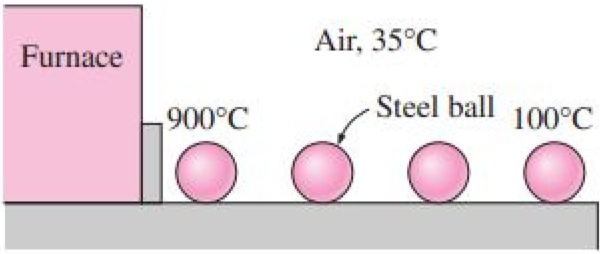
$$\frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty} = \exp(-\frac{h}{\frac{\rho C}{k}\frac{V}{A}k}t) = \exp(-\frac{h}{\frac{1}{\alpha}Lk}t) = \exp(-\frac{\alpha hL}{LkL}t) = \exp(-\frac{hL}{k}\frac{\alpha t}{L^2}) = \exp(-Bi.Fo)$$

$$\boxed{\frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty}=\exp(-Bi.Fo)}$$

در این رابطه $Fo=\frac{\alpha t}{L^2}$ عدد فوریه(Fourier Number) نام دارد که یک زمان بی بعد است و نسبت آهنگ رسانش گرما به آهنگ ذخیره انرژی گرمایی در جسم را نشان می دهد.($\alpha=\frac{k}{\rho C}$)

تمرین

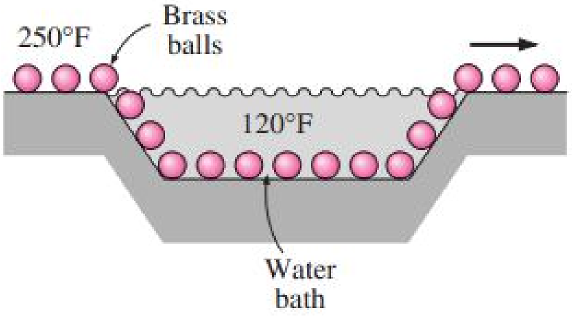
توپهای فولاد کربنی($\rho=7833\frac{kg}{m^3},k=54W/mC,C_P=0.465kJ/kgC,\alpha=1.474\times10^{-6}m^2/s$)به قطر 8mm ابتدا در یک کوره به دمای 900C حرارت داده می شوند و سپس اجازه داده می شود تا به آهستگی تا دمای 100C در معرض هوای محیط به دمای 35C خنک شوند.اگر ضریب جابجایی هوا 75W/m^{2}C باشد، فرایند سرمایش چه مدت طول خواهد کشید؟اگر 2500 توپ در هر ساعت سرد شود کل نرخ انتقال حرارت از توپها به هوای محیط را بدست آورید.



تمرین

توپهای برنجی به قطر 2in ($\rho=532\frac{lbm}{ft^3},k=64.1Btu/h.ft.F,C_P=0.092Btu/lbm.F$)که ابتدائا در دمای 250F قرار دارند، در یک حمام آب به دمای 120F بمدت دو دقیقه و با نرخ 120 توپ در دقیقه فرو می روند. اگر ضریب جابجایی 42Btu/h.ft^2.F باشد، مطلوبست:

- الف) دمای توپها بعد از فرو رفتن در آب
- ب) نرخ گرمایی که از آب باید دفع شود تا دمای حمام آب در 120F ثابت بماند.



8

فصل چهارم: انتقال حرارت جابجایی(**Convection Heat Transfer**)

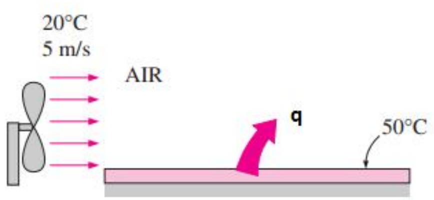
همانگونه که در فصل اول بیان شد انتقال حرارت جابجایی انتقال حرارت بواسطه حرکت تصادفی ملکول ها و حرکت تودهٔ سیال روی یک سطح جامد می باشد.برای هر نوع انتقال گرمای جابجایی رابطه زیر را برای محاسبه شار حرارتی می توان بکار برد:

$$\boxed{q" = h(T_s - T_\infty)}$$

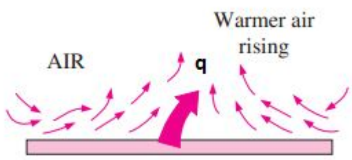
$q"$: شار گرمای موضعی (Local Heat Flux)

T_s دمای سطح، T_∞ دمای سیال و h ضریب جابجایی موضعی(Local Convection Heat Transfer Coefficient) است.

اگرسیال توسط یک عامل خارجی از قبیل پمپ یا فن جریان داشته باشد، جابجایی را اجباری(Forced Convection) و اگرعامل حرکت آن اختلاف چگالی باشد آن را جابجایی طبیعی یا آزاد (Free Convection) می نامند.



(*a*) Forced convection



(*b*) Free convection

با توجه به اینکه شرایط جریان در نقطه به نقطه سطح تغییر می کند لذا h و در نتیجه $q"$ در امتداد سطح متغیر خواهند بود.

$$q = \int q"dA = (T_s - T_\infty)\int hdA$$

از طرف دیگر با تعریف ضریب جابجایی متوسط $\bar{h}$ (Average Convection Heat Transfer Coefficient) برای کل سطح می توان نوشت:

$$q = \bar{h}A(T_s - T_\infty) \Rightarrow \bar{\mathrm{h}}A(\mathrm{T_s} - \mathrm{T_\infty}) = (\mathrm{T_s} - \mathrm{T_\infty})\int \mathrm{hdA} \Rightarrow$$

$$\boxed{\bar{\mathrm{h}} = \frac{1}{\mathrm{A}}\int \mathrm{hdA}}$$

و در حالتیکه عرض صفحه(b) ثابت باشد(A=bL,dA=bdx):

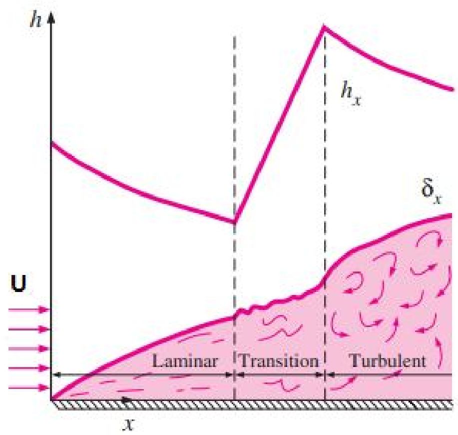
$$\bar{h} = \frac{1}{\mathrm{bL}}\int_0^{\mathrm{L}} \mathrm{hbdx} = \frac{1}{\mathrm{L}}\int_0^{\mathrm{L}} \mathrm{hdx}$$

ضریب جابجایی به عواملی نظیر چگالی سیال، سرعت و دمای سیال،دمای سطح، ضریب هدایت گرمایی، گرمای ویژه، شکل هندسی و شرایط جریان وابسته است.

تمرین

برای جابجایی آزاد و آرام از یک صفحه گرم عمودی، ضریب جابجایی موضعی بصورت $h_x = Cx^{-0.25}$ بیان می شود که h_x ضریب جابجایی در فاصله x از لبه ابتدایی صفحه بوده و کمیت C که به خواص سیال وابسته است، مستقل از x است. عبارتی برای $\frac{\bar{h}_x}{h_x}$ پیدا کنید که در آن $\bar{h}_x$ ضریب متوسط بین لبه ابتدایی (x=0) و نقطه x است.

بعلت رشد لایه مرزی، ضریب انتقال حرارت جابجائی با افزایش فاصله نسبت به لبهٔ ابتدایی کاهش می یابد.



لایه مرزی سرعت(Velocity Boundary Layer)

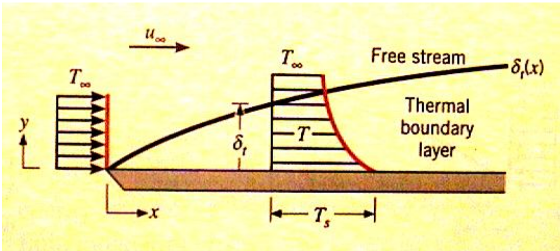
لزجت یک سیال مقاومت آن سیال در مقابل تنش برشی است. هرچقدر لزجت سیال بیشتر باشد این سیال در مقابل جاری شدن مقاومت بیشتری از خود نشان می دهد در یک محیط پیوسته وقتی یک سیال از روی سطح ثابتی جریان می یابد لایه هایی از سیال که در مجاورت سطح هستند به سطح می چسبند یعنی سرعت سیال روی سطح ثابت صفر است. با افزایش فاصله از دیوار، سرعت به تدریج افزایش یافته تا نهایتا به مقدار آن در جریان آزاد می رسد.لایه ای را که در آن گرادیان سرعت وجود دارد لایه مرزی سرعت یا به اختصار لایه مرزی می نامند. در بیرون از لایه مرزی جریان غیر لزج در نظر گرفته می شود. در یک لایه مرزی هر دو مولفه سرعت در راستای عمود و مماس بر سطح روی سطح ثابت صفر است.ضریب اصطکاک (Friction Coefficient)و تنش برشی(Shear Stress) بترتیب از روابط زیر بدست می آیند:

$$C_f = \frac{\tau_s}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$$

$$\tau_s = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}$$

لایه مرزی گرمایی(Thermal Boundary Layer)

لایه مرزی گرمایی نیز هنگامی بوجود می آید که دماهای سطح و جریان آزاد سیال متفاوت باشند. در لبه ابتدایی پروفیل دما یکنواخت بوده و رابطه $T(y) = T_\infty$ برقرار است ولی ذرات سیال که در تماس با صفحه قرار دارند به تعادل گرمایی در دمای سطح می رسند. با تبادل انرژی بین این ذرات و ذرات لایه مجاور، گرادیان دما در سیال ایجاد می شود. ناحیه ای از سیال که گرادیان دما وجود دارد، لایه مرزی گرمایی نامیده می شود، که ضخامت آن δ_t (Boundary Layer Thickness) برابر مقدار y در $\frac{T_s - T}{T_s - T_\infty} = 0.99$ است.با افزایش فاصله نسبت به لبهٔ ابتدایی، اثرات انتقال گرما با نفوذ بیشتر به داخل جریان آزاد موجب رشد لایه مرزی گرمایی می شوند.



انتقال حرارت از صفحه به نخستین لایه سیال که چسبیده به سطح است،چون هر دو نسبت به هم ساکنند از نوع هدایت است که مقدار این شار از رابطه زیر بدست می آید:

$$q''_s = -k_f \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0}$$

اندیس f به سیال اشاره می کند.

از طرف دیگر انتقال حرارت از این لایه به لایه های دیگر سیال از نوع جابجایی است و می توان رابطه زیر را بکار برد:

$$q''_s = h(T_s - T_\infty)$$

از موازنه انرژی برای لایه چسبیده به صفحه رابطه زیر بدست می آید:

$$\boxed{h = \frac{-k_f \frac{\partial T}{\partial y}\big|_{y=0}}{T_s - T_\infty}}$$

اگر پروفیل دما در لایه مرزی معلوم باشد به کمک رابطه فوق می توان ضریب جابجایی را بدست آورد.

با توجه به اینکه گرادیان دما در لایه مرزی با افزایش x کاهش می یابد لذا $\frac{\partial T}{\partial y}\big|_{y=0}$ با افزایش x کم می شود و در نتیجه q''_s و h با افزایش x کاهش می یابند.

تمرین

در جریان روی یک سطح، پروفیل های سرعت و دما بقرار زیرند:

$u(y) = Ay + By^2 - Cy^3$

$T(y) = D + Ey + Fy^2 - Gy^3$

که در آن ضرایب A تا G ثابتند. عبارتی برای ضریب اصطکاک C_f و ضریب جابجایی h برحسب u_∞، T_∞ و ضرایب پروفیلها و خواص سیال بدست آورید.

معادلات لایه مرزی(**Boundary Layer Equations**)

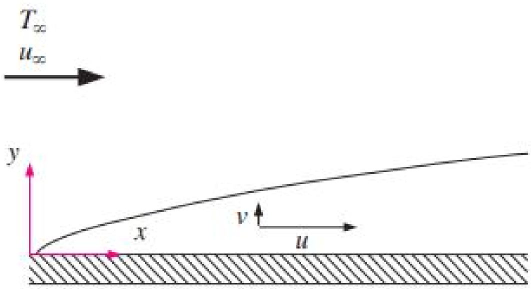
معادلات حاکم بر لایه مرزی همان معادلات پیوستگی،مومنتوم در جهت x ،مومنتوم در جهت y و انرژی می باشند که بترتیب بصورت زیرند:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \upsilon\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\upsilon}{C_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$



1) Velocity components:
$v \ll u$

2) Velocity grandients:
$\frac{\partial v}{\partial x} \approx 0, \frac{\partial v}{\partial y} \approx 0$
$\frac{\partial u}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial y}$

3) Temperature gradients:
$\frac{\partial T}{\partial x} \ll \frac{\partial T}{\partial y}$

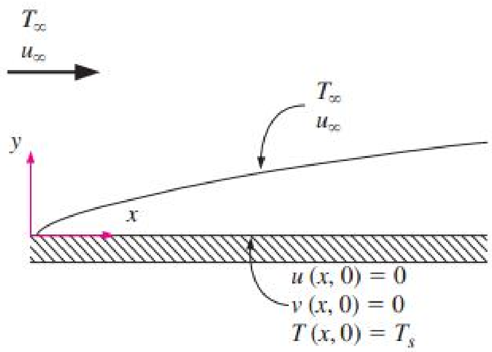
روابط داخل کادر فوق، ساده سازیهایی است که برای حل این معادلات صورت می گیرد.uوv مولفه های سرعت در راستاهایxوy می باشند.با اعمال این ساده سازیها در معادلات اصلی در جریان روی صفحه تخت به معادلات ساده شده زیر می رسیم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

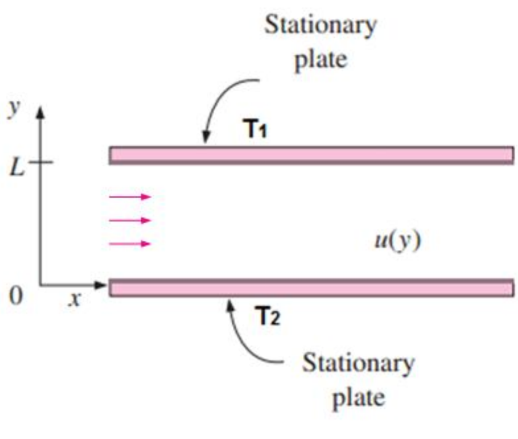
این معادلات برای حل به یک سری شرایط مرزی نیاز دارند.شرط عدم لغزش بیان می کند مولفه های سرعت لایه چسبیده به سطح باید با سرعت سطح برابر باشد که چون سطح ثابت است لذا این دو مولفه باید صفر باشند،از طرفی شرط عدم لغزش دمایی بیان می کند دمای لایه چسبیده به سطح باید با دمای سطح برابر باشد و چون دمای سطح برابر T_s است، لذا دمای این لایه برابر T_s خواهد بود.شرایط مرزی برای یک صفحه تخت در شکل زیر نشان داده شده است:



در فصل بعد در مورد جواب این معادلات بحث خواهیم کرد.

تمرین

مسئله جریان دائم، آرام و تراکم ناپذیر را بین دو صفحه موازی نامحدود و ساکن با دماهای مختلف در نظر بگیرید. جریان پوازویل با انتقال گرما، حالت خاصی از جریان موازی است که در آن مولفه x سرعت معین بوده ولی مولفه های y و z (V و W) صفرند.



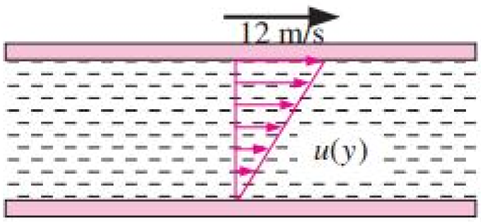
- الف) شکل معادله پیوستگی را در این حالت بدست آورید.

- ب) معادلات اندازهٔ حرکت در جهت x و y به چه شکلی درمی آیند؟ شکل پروفیل سرعت را تعیین کنید. توجه داشته باشید در این حالت حرکت سیال توسط گرادیان فشار معینی بوجود می آید.رابطه بین این گرادیان فشار و بیشترین سرعت سیال چگونه است؟
- ج) با فرض مهم بودن تلفات لزجت شکل معادله انرژی را بدست آورده و آن را برای تعیین توزیع دما حل کنید. شار گرما در سطح بالایی (y=L) چقدر است؟

تمرین

جریان روغن در یک یاتاقان ژورنال را می توان بصورت جریان موازی بین دو صفحه بزرگ که یکی ساکن و دیگری با سرعت12m/s حرکت می کند، مدل کرد.فرض کنید ضخامت سیال بین دو صفحه0.7mm باشد.دمای صفحه بالایی و پایینی بترتیب40C و 15C است.با ساده سازی و حل معادلات پیوستگی،مومنتوم و انرژی،تعیین کنید:

- الف)توزیع سرعت و دما را در روغن
- ب)ماکزیمم دما و محل آن را
- ج)شار حرارتی از روغن به هر صفحه.



در این قسمت با چند عدد بی بعد که در انتقال حرارت جابجایی کاربرد دارند آشنا می شویم.

عدد پرانتل(Prandtl Number)

عدد پرانتل عدد بی بعد معروفی در انتقال حرارت است که از تقسیم دو خاصیت سیال بدست می آید.

$$\boxed{\Pr = \frac{\nu}{\alpha}}$$

عدد پرانتل معیاری است از میزان نسبی پخش اندازهٔ حرکت و پخش انرژی در لایه های مرزی سرعت و گرمایی، در حقیقت عدد پرانتل لایه های مرزی سرعت و دمایی را بهم ربط می دهد.

پرانتل برابر یک بمعنای $\delta \approx \delta_t$ است.یعنی انتقال اندازه حرکت و انرژی توسط پخش به یک اندازه است و یا به تعبیر دیگر ضخامت لایه مرزی سرعت و دمایی به یک اندازه است که این وضعیت برای گازها وجود دارد.

پرانتل خیلی کمتر از یک بمعنای $\delta \gg \delta_t$ است. در این حالت نرخ پخش انرژی بمراتب بیش از نرخ پخش اندازه حرکت است. فلزات مایع این گونه اند.

پرانتل خیلی بیشتر از یک به مفهوم $\delta \ll \delta_t$ است یعنی نرخ پخش انرژی بمراتب کمتر از نرخ پخش اندازه حرکت است مانند روغنها.

برای لایه های مرزی آرام $\frac{\delta}{\delta_t} \approx \mathrm{Pr}^n$ که در آن n یک عدد مثبت است.محدوده پرانتل مواد مختلف در جدول زیر نشان داده شده است.

Fluid	Pr
Liquid metals	0.004–0.030
Gases	0.7–1.0
Water	1.7–13.7
Light organic fluids	5–50
Oils	50–100,000
Glycerin	2000–100,000

عدد رینولدز(Reynolds Number)

عدد رینولدز(Re)بعنوان نسبت نیروهای اینرسی(Inertia Forces) به نیروهای لزجتی(Viscous Forces) در لایه مرزی سرعت تعریف می شود.

$$\mathrm{Re} = \frac{\frac{\rho V^2}{L}}{\frac{\mu V}{L^2}}$$

$$\boxed{\mathrm{Re} = \frac{\rho V L}{\mu}}$$

بنابراین در مقادیر بزرگ رینولدز نیروهای اینرسی و در مقادیر کوچک آن نیروهای لزجتی غالب است.

عدد نوسلت(Nusselt Number)

عدد نوسلت همان نقشی را در لایه مرزی گرمایی دارد که ضریب اصطکاک در لایه مرزی سرعت دارد.

در هنگام حل مسائل انتقال حرارت جابجایی بسته به نوع هندسه و رژیم جریان،عدد نوسلت از رابطه مناسب تعیین می شود و سپس با استفاده از تعریف آن، ضریب جابجایی بدست می آید. عدد نوسلت بطور کلی تابعی از رینولدز و پرانتل است.

$$\boxed{N\bar{u} = \frac{\bar{h} L}{k_f}}$$

$$N\bar{u} = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr})$$

عدد نوسلت موضعی از رابطه زیر بدست می آید:

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k_f}$$

$$Nu_x = f(x, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr})$$

عدد استانتون(Stanton Number)

این عدد بی بعد به صورت زیر تعریف می شود:

$$\boxed{St = \frac{Nu}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}}$$

تمرین

توزیع دمای لایه مرزی جریان هوایی روی یک سطح گرم با عبارت زیر تقریب زده می شود:

$$\frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} = 1 - \exp(-\mathrm{Pr}\frac{u_\infty y}{\nu})$$

که درآن y فاصله عمود بر سطح و عدد پرانتل0.7 است.اگر $T_\infty = 400\,K$ ،$T_s = 300K$ و $\frac{u_\infty}{\nu} = 5000$ باشد،شار گرمای سطحی چقدر خواهد بود؟ضریب هدایتی هوا را $0.03\frac{W}{mK}$ در نظر بگیرید.

تشابه های لایه مرزی(Boundary Layer Analogies)

بکمک روابط تشابه بین دو جسم می توان نتایج بدست آمده روی یکی را به دیگری تعمیم داد.در دو جسمی که با هم تشابه دارند عدد رینولدز و عدد نوسلت در هر دو یکسان خواهند بود.

$$\mathrm{Re}_1 = \mathrm{Re}_2 \Rightarrow \frac{\rho_1 V_1 L_1}{\mu_1} = \frac{\rho_2 V_2 L_2}{\mu_2}$$

$$Nu_1 = Nu_2 \Rightarrow \frac{h_1 L_1}{k_1} = \frac{h_2 L_2}{k_2}$$

تشابه رینولدز(چیلتون-کولبرن)(Chilton-Colburn Analogy)

تشابه چیلتون کولبرن ضریب اصطکاک را به ضریب جابجایی ربط می دهد.اگر پارامتری در لایه مرزی سرعت معلوم باشد،برای تعیین پارامتر انتقال گرما می توان از تشابه استفاده کرد و برعکس.

$$\boxed{St.\mathrm{Pr}^{\frac{2}{3}} = \frac{C_f}{2}}$$

در جریان آشفته تشابه فوق همیشه صحت دارد اما در جریان آرام اگر گرادیان فشار زیاد باشد صحت این رابطه دچار تردید می شود.

$St.\Pr^{\frac{2}{3}}$ را ضریب بی بعد انتقال گرما یا ضریب j کولبرن(j_H)می نامند.

تمرین

آزمایشهای انجام شده نشان می دهند که برای جریان هوا به دمای $T_\infty = 35°\text{C}$ و سرعت $V_1 = 100\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ نرخ انتقال گرما از پرهٔ توربین با طول مشخصه $L_1 = 0.15\text{m}$ و دمای سطح $T_{s1} = 300°\text{C}$ برابر $q_1 = 1500\text{w}$ است. نرخ انتقال گرما از پرهٔ توربین دوم با طول مشخصه $L_2 = 0.3\text{m}$ و دمای سطح $T_{s2} = 400°\text{C}$ که در معرض جریان هوا به دمای $T_\infty = 35°\text{C}$ و سرعت $V_2 = 50\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ قرار دارد، چقدر است؟ فرض می شود مساحت پره نسبت مستقیم با طول مشخصه آن دارد.

تمرین

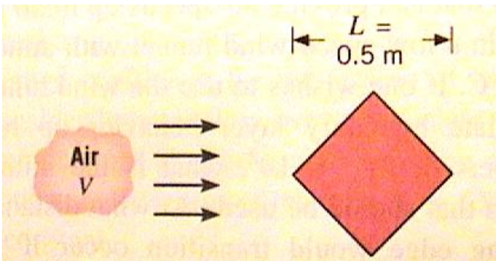
نتایج آزمایشهای انجام شده در مورد ضریب انتقال گرمای جابجایی روی یک میله مربعی که به طور عمودی در برابر جریان هوا قرار دارد،به شرح زیر است:

$V_1 = 20\frac{m}{s}$ وقتی که $\bar{h}_1 = 50\frac{W}{m^2K}$

$V_2 = 15\frac{m}{s}$ وقتی که $\bar{h}_2 = 40\frac{W}{m^2K}$

فرض کنید که شکل تابعی عدد نوسلت بصورت $N\bar{u} = C\,\text{Re}^m\,\Pr^n$ است که m،C و n ثابتند.

- الف)ضریب انتقال گرمای جابجایی برای یک میله مشابه بطول یک متر و سرعت هوای 15 متر بر ثانیه چقدر خواهد بود؟
- ب)ضریب انتقال گرمای جابجایی برای یک میله مشابه بطول یک متر و سرعت هوای 30 متر بر ثانیه چقدر خواهد بود؟
- ج)اگر یکی از اضلاع میله را به جای قطر آن به عنوان طول مشخصه انتخاب نماییم،آیا نتایج مشابهی به دست می آید؟



9

فصل پنجم: جابجایی اجباری خارجی (External Forced Convection)

جریان خارجی(External Flow)

هرگاه جریان روی یک سطح جامد وجود داشته باشد بطوریکه لایه های مرزی بدون وجود اثرات سطوح مجاور بتوانند آزادانه رشد کنند جریان را خارجی می نامند. در خارج از لایه های مرزی گرادیان دما و سرعت ناچیز است. مانند حرکت سیال روی یک صفحه تخت و یا جریان روی سطوح منحنی مانند کره، استوانه و ...

جابجایی اجباری(Forced Convection)

در حرکت جابجایی اجباری، عامل حرکت توسط یک نیروی خارجی تأمین می شود مانند فن، پمپ و ... . هدف ما در این فصل بدست آوردن ضرایب جابجایی برای جریان روی اشکال هندسی مختلف است.بطورکلی عدد نوسلت متوسط تابعی از رینولدز و پرانتل است در حالیکه عدد نوسلت موضعی علاوه بر این دو تابعی از مکان هم است:

$\overline{Nu}_{\mathrm{x}} = \mathrm{f}(\mathrm{Re_x}, \mathrm{Pr})$ و $Nu_{\mathrm{x}} = \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{Re_x}, \mathrm{Pr})$

روش تجربی(Experimental Method)

فرض کنید صفحه تختی در جریان موازی بگونه ای توسط الکتریسیته گرم می شود که $\mathrm{T_s} > \mathrm{T_\infty}$، در این صورت انتقال گرمای جابجایی از سطح به سیال روی خواهد داد می توان $\mathrm{T_s}$ و $\mathrm{T_\infty}$ و همچنین توان الکتریکی (VI) که برابر انتقال گرمای کلی (q) است را بسادگی اندازه گیری کرد و با استفاده از رابطه $q = \bar{h}_L A(T_s - T_\infty)$ ضریب انتقال حرارت جابجایی را بدست آورد. می توان این آزمایش را برای شرایط گوناگون تکرار نمود مثلاً سرعت جریان، طول صفحه و جنس سیال (Pr) را تغییر داد. از آزمایشات می توان نتیجه گرفت که:

$$\boxed{\overline{Nu}_{\mathrm{L}} = \mathrm{C}\mathrm{Re}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{m}}\mathrm{Pr}^{\mathrm{n}}}$$

C و m و n مستقل از جنس سیالند و بستگی به شکل سطح و نوع جریان دارند. باید توجه داشت که خواص سیال در عرض لایه مرزی با دما تغییر می کند و باید اثر این تغییرات را در نظر گرفت، می توان به دو شکل این تأثیرات را ملحوظ نمود:

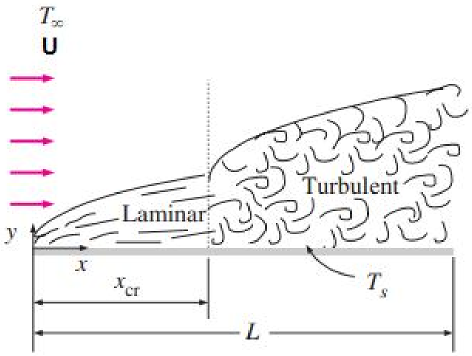
در روش اول خواص سیال در دمای میانگین لایه مرزی که دمای لایه ای(Film Temperature) نام دارد محاسبه می شوند.دمای میانگین بصورت زیر تعریف می شود:

$$T_{\mathrm{f}} = \frac{\mathrm{T_s} + \mathrm{T_\infty}}{2}$$

در روش دوم، کلیه خواص در T_∞ محاسبه شده و عبارت $CRe_L^m Pr^n$ در یک پارامتر اضافی که تغییرات خواص را به حساب می آورد ضرب می شود.

این پارامتر معمولاً به شکل $\left(\frac{Pr_\infty}{\mathrm{Pr}_s}\right)^r$ یا $\left(\frac{\mu_\infty}{\mu_s}\right)^r$ است. اندیس ∞ خواص را در دمای جریان آزاد و اندیس s خواص را در دمای سطح نشان می دهد.

صفحه تخت(Flat Plate)



تمام روابطی که در ادامه می آید برای صفحه تخت کاربرد دارد و اگر هندسه جسم تغییر کند اعتبار خود را از دست می دهند.

ابتدا جریان آرام را بررسی می کنیم(Laminar Flow) می دانید هرگاه رینولدز کمتر از 500000 باشد،جریان آرام است.فرض می کنیم جریان دائمی، تراکم ناپذیر، خواص سیال ثابت و اتلافات لزجت ناچیز باشد.همانطورکه در فصل گذشته اشاره شد معادلات حاکم بصورت زیر است که اولی پیوستگی دومی مومنتوم و سومی انرژی نام دارد:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

با حل معادلات فوق می توان روابط مربوط به جریان آرام را بدست آورد:

$$\boxed{\begin{array}{l}\delta=5x\,\mathrm{Re}_x^{-0.5}\\ \tau_{s,x}=0.332U_\infty\left(\frac{\rho\mu U_\infty}{x}\right)^{0.5}\\ C_{f,x}=0.664\,\mathrm{Re}_x^{-0.5}\\ Nu_x=\frac{h_x x}{k}=0.332\,\mathrm{Re}_x^{0.5}\,\mathrm{Pr}^{0.33}\qquad 0.6\le \mathrm{Pr}\le 50\end{array}}$$

خواص باید در T_f محاسبه شود.

رابطه تجربی زیر ضخامت لایه مرزی سرعتی(هیدرودینامیکی) را به ضخامت لایه مرزی دمایی در جریان آرام ربط می دهد:

$$\boxed{\frac{\delta}{\delta_t}=\mathrm{Pr}^{0.33}}$$

با استفاده از انتگرال گیری می توان پارامترهای $\bar{C}_{f,x}$ و $\bar{\tau}_{s,x}$ و $\bar{h}_x$ و $\overline{Nu}_x$ را در لایه مرزی تعیین کرد.

$$\bar{\tau}_{s,x}=\frac{1}{x}\int_0^x \tau_{s,x}dx$$
$$\bar{C}_{f,x}=\frac{\bar{\tau}_{s,x}}{\frac{\rho u_\infty^2}{2}}$$
$$\bar{h}_x=\frac{1}{x}\int_0^x h_x dx$$
$$N\bar{u}_x=\frac{\bar{h}_x x}{k}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\bar{\tau}_{s,x}=0.332U_\infty\left(\frac{\rho\mu U_\infty}{x}\right)^{0.5}\\ &\bar{C}_{f,x}=1.328\,\mathrm{Re}_x^{-0.5}\\ &\bar{h}_x=2h_x\\ &N\bar{u}_x=\frac{\bar{h}_x x}{k}=0.664\,\mathrm{Re}_x^{0.5}\,\mathrm{Pr}^{0.33}\qquad 0.6\le \mathrm{Pr}\le 50\end{aligned}}$$

برای سیالاتی با عدد پرانتل کوچک مانند فلزات مایع چون رشد لایه مرزی گرمایی خیلی سریعتر از لایه مرزی سرعت صورت می گیرد لذا نباید از معادله فوق برای Nu_x استفاده کرد رابطه مناسب در این حالت بصورت زیر است:

$$\boxed{Nu_x=0.565Pe_x^{0.5}\qquad \mathrm{Pr}\le 0.05,\ Pe_x\ge 100}$$

در رابطه فوق Pe_xعدد پکله نام دارد که بصورت زیر تعریف می شود:

$$\boxed{Pe_x=\mathrm{Re}_x\,\mathrm{Pr}}$$

رابطه تجربی دیگری که برای کلیه اعداد پرانتل معتبر است توسط چرچیل و اوزو(Churchill Ozoe) ارائه شده است. در جریان آرام روی صفحه همدما می توان Nu_x را از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$\boxed{Nu_x=\frac{0.3387\,\mathrm{Re}_x^{0.5}\,\mathrm{Pr}^{0.33}}{\left[1+\left(\frac{0.0468}{\mathrm{Pr}}\right)^{0.67}\right]^{0.25}}\qquad Pe_x\ge 100}$$

تمرین

پروفیل سرعت لایه مرزی برای جریان روی یک صفحه تخت بصورت $u=C_1+C_2Sin(C_3y)$ داده شده است با اعمال شرایط مرزی مناسب عبارتی برای پروفیل سرعت برحسب ضخامت لایه مرزی δ و سرعت جریان آزاد U_∞ بدست آورید.

تمرین

یک فلز مایع $(Pr \ll 1)$ با شرایط جریان آزاد U_∞ و T_∞ بطور موازی روی صفحه تخت ایزوترمی به دمای T_s جریان دارد. با فرض

$u = U_\infty$ در سرتاسر لایه مرزی گرمایی، معادله انرژی لایه مرزی در این حالت را بنویسید. با اعمال شرایط اولیه (x=0) و مرزی، میدان دمای T(x,y) را در لایه مرزی بدست آورید. با استفاده از نتایج فوق، عبارتی برای عدد نوسلت موضعی Nu_x تعیین کنید.

جریان مغشوش(Turbulent Flow)

در جریان مغشوش رینولدز جریان بیشتر از500000 است. ضخامت لایه مرزی، ضریب اصطکاک موضعی و تنش برشی موضعی را با استفاده از آزمایشات تجربی می توان در این حالت از روابط زیر بدست آورد:

$$\boxed{\begin{aligned}&\delta = 0.37x\,\mathrm{Re}_x^{-0.2}\\&C_{f,x} = 0.0592\,\mathrm{Re}_x^{-0.2}\\&\tau_{s,x} = 0.0135\mu^{\frac{1}{7}}\rho^{\frac{6}{7}}U^{\frac{13}{7}}x^{-\frac{1}{7}}\end{aligned}}$$

در جریان مغشوش رشد لایه مرزی خیلی سریعتر صورت می گیرد و کاهش ضریب اصطکاک نیز تدریجی تر است. در این نوع جریان رشد لایه مرزی تحت تأثیر نوسانات تصادفی در سیال است و نه تحت تأثیر پخش ملکولی. بنابراین رشد نسبی لایه مرزی به مقدار Pr وابسته نیست و در نتیجه $\delta \approx \delta_t$ همچنین می توان معادله چیلتون – کولبرن (Chilton-Colburn) را برای تعیین عدد نوسلت موضعی در جریان مغشوش بکار برد.

$$\boxed{Nu_x = \mathrm{St}\mathrm{Re}_x\mathrm{Pr} = 0.0296\mathrm{Re}_x^{\frac{4}{5}}\mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}} \qquad 0.6 < \mathrm{Pr} < 60}$$

باید توجه داشت بواسطه افزایش اختلاط، لایه مرزی مغشوش خیلی سریعتر از لایه مرزی آرام رشد می کند.

لایه های مرزی مرکب(Mixed Boundary Layer Conditions)

اگر جریان روی کل صفحه آرام و یا تبدیل به جریان مغشوش نزدیک به انتهای صفحه مثلاً $0.95 \le \frac{x}{L} \le 1$ روی دهد می توان از معادلات حالت آرام استفاده کرد اما در $\frac{x}{L} \le 0.95$ ضرایب متوسط سطحی تحت تأثیر شرایط توأم لایه های مرزی آرام و مغشوش قرار می گیرند.در این حالت از روابط زیر استفاده می شود:

$$\boxed{\begin{aligned}&\overline{Nu}_L = (0.037\,\mathrm{Re}_L^{0.8} - 871)\,\mathrm{Pr}^{0.33} \qquad 0.6 < \mathrm{Pr} < 60\\&\overline{C}_{f,L} = 0.074\,\mathrm{Re}_L^{-0.2} - 1742\,\mathrm{Re}_L^{-1}\end{aligned}}$$

اگر $L >> x_c$:

$$\boxed{\begin{aligned}&\overline{Nu}_L = 0.037\,\mathrm{Re}_L^{0.8}\,\mathrm{Pr}^{0.33} \qquad 0.6 < \mathrm{Pr} < 60\\&\overline{C}_{f,L} = 0.074\,\mathrm{Re}_L^{-0.2}\end{aligned}}$$

حالات خاص

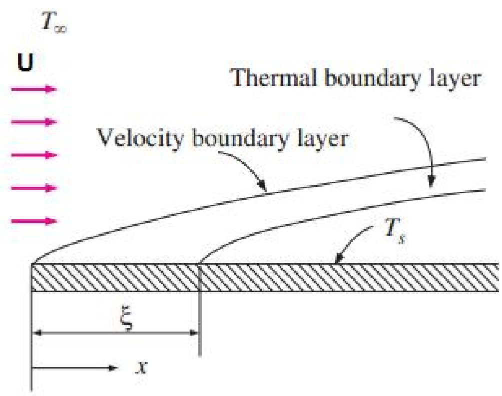
طول ورودی آدیاباتیک:

در جریان روی صفحه تخت ممکن است بخش ابتدایی صفحه با دمای سیال برابر باشد و در نتیجه انتقال حرارت از آن قسمت انجام نشود که به این بخش، طول ورودی آدیاباتیک گفته می شود در طول ورودی آدیاباتیک: $T_s = T_\infty$

اگر ξطول ورودی آدیاباتیک باشد بسته به رژیم جریان از یکی از روابط زیر برای تعیین عدد نوسلت استفاده می شود.رابطه بالایی برای جریان آرام و رابطه پایینی برای جریان آشفته بکار می رود:

$$Nu_x = \frac{0.332\,\mathrm{Re}_x^{0.5}\,\mathrm{Pr}^{0.33}}{\left[1-\left(\frac{\xi}{x}\right)^{0.75}\right]^{0.33}}$$

$$Nu_x = \frac{0.0296\,\mathrm{Re}_x^{0.8}\,\mathrm{Pr}^{0.33}}{\left[1-\left(\frac{\xi}{x}\right)^{0.9}\right]^{0.11}}$$



شار گرمای یکنواخت:

حالت خاص دیگری که پیش می آید زمانی است که بجای اینکه دمای سطح ثابت باشد،شار حرارتی ثابتی بر سطح بتابد در این حالت از یکی از دو رابطه پایینی (رابطه اول برای جریان آرام و رابطه دوم برای جریان آشفته) استفاده می شود:

$$Nu_x = 0.453\,\mathrm{Re}_x^{0.5}\,\mathrm{Pr}^{0.33}$$
$$Nu_x = 0.0308\,\mathrm{Re}_x^{0.8}\,\mathrm{Pr}^{0.33}$$

در حالت شار ثابت عدد نوسلت برای جریان آرام و مغشوش بترتیب36% و 4% نسبت به حالت دمای ثابت سطح بیشتر است.

اگر شار گرما معلوم باشد برای تعیین دمای متوسط سطح بصورت زیر عمل می کنیم:

ابتدا یک دمای متوسط سطح حدس می زنیم و بمنظور خواندن خواص، دمای لایه ای را بدست می آوریم.سپس نوسلت متوسط را از رابطه:

$$N\overline{u}_L = 0.68\,\mathrm{Re}_L^{0.5}\,\mathrm{Pr}^{0.33}$$

تعیین کرده و با جایگذاری در رابطه

$$\overline{T}_s = T_\infty + \frac{q_s'' L}{k\overline{Nu}_L}$$

دمای متوسط سطح را بدست می آوریم.چنانچه اختلاف بین دمای بدست آمده با دمای حدس زده بیشتر از 5% باشد باید مراحل فوق و این بار با دمای بدست آمده بعنوان حدس دوم تکرار شود تا اختلاف کمتر از5% شود.

تمرین

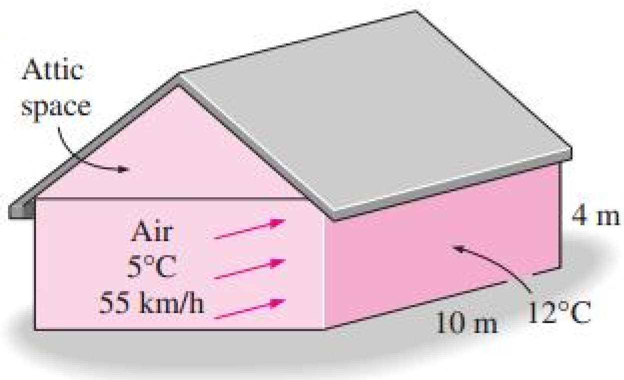
سطح یک صفحه به طول 1.5m در دمای ثابت 40°C نگه داشته می شود و آب با دمای 4°C و سرعت $6\frac{m}{s}$ بر روی آن جریان دارد.

- الف) از دمای لایه ای برای محاسبه خواص استفاده کرده و نرخ انتقال گرما را بر واحد عرض صفحه بدست آورید.
- ب) خطای ایجاد شده در مقدار قسمت (الف) را در صورتی که خواص ترموفیزیکی آب در دمای جریان آزاد انتخاب شوند و از همان رابطه تجربی استفاده کنیم محاسبه نمایید.
- ج) اگر در قسمت الف یک سیم در لبه ابتدایی قرار گیرد به نحوی که جریان در سرتاسر سطح مغشوش باشد نرخ انتقال گرما چقدر خواهد بود؟

تمرین

در یک روز سرد زمستانی، باد با سرعت55km/h بطور موازی به دیوار خانه ای به طول10m و ارتفاع 4m می وزد.اگر دمای هوای بیرون5C و دمای سطح دیوار12C باشد،

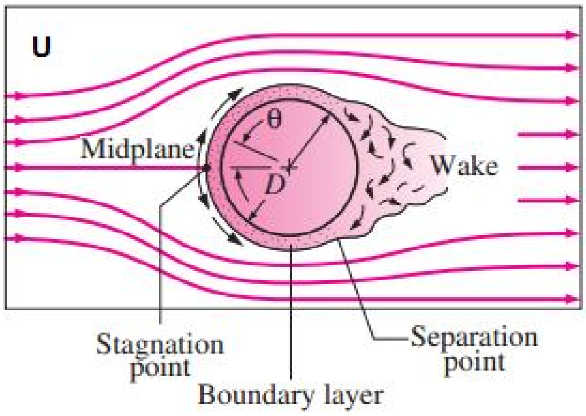
- الف)نرخ اتلافات گرما از دیوار را که توسط انتقال حرارت جابجایی انجام می شود بیابید.
- ب)اگر سرعت باد دو برابر شود نرخ انتقال حرارت چه تغییری می کند؟



10

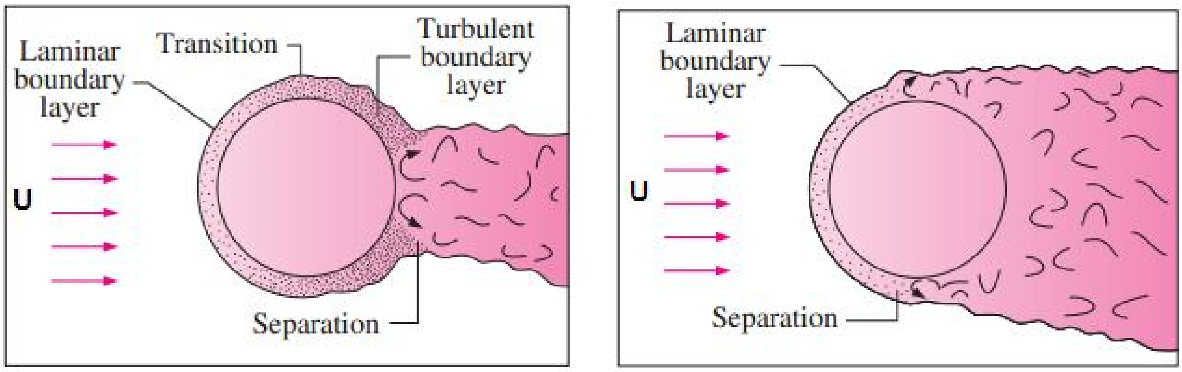
جریان عمود بر استوانه(Cylinder in Cross Flow)

یکی از جریان های خارجی متداول، حرکت سیال در جهت عمود بر محور یک استوانه است. جریان سیال در نقطه سکون به حالت ساکن درآمده و فشار افزایش می یابد. از این نقطه به بعد فشار کاهش یافته و سرعت افزایش پیدا می کند که به این حالت گرادیان فشار مطلوب گفته می شود (Favorable Gradient Pressure) ولی نهایتاً فشار به کمترین مقدار رسیده و گرادیان فشار نامطلوب (Adverse Gradient Pressure) در پشت استوانه صورت می گیرد.



برخلاف شرایط صفحه تخت در جریان موازی، U_∞ به فاصله x از نقطه سکون وابسته است. از $U_\infty = 0$ در نقطه سکون بواسطه وجود گرادیان فشار مطلوب سیال شتاب گرفته $\left(\frac{dU_\infty}{dx} > 0 \text{ و } \frac{dP}{dx} < 0\right)$ سرعت آن به بیشترین مقدار در $\frac{dP}{dx} = 0$ رسیده و بواسطه وجود گرادیان فشار نامطلوب شتاب خود را از دست میدهد. $\left(\frac{dU_\infty}{dx} < 0 \text{ و } \frac{dP}{dx} > 0\right)$ با کاهش سرعت سیال گرادیان سرعت در سطح($\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0}$) نهایتاً به صفر می رسد. در این نقطه که به نقطه جدایی (Separation Point) موسوم است،اندازهٔ حرکت سیال در نزدیکی سطح برای غلبه بر گرادیان فشار کافی نیست و ادامه حرکت در پایین دست جریان ناممکن است در نتیجه لایه مرزی جدا می شود جریان در این ناحیه توسط تشکیل گردابه (Vortex)مشخص می شود. در نقطه جدایی: $\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 0$

با توجه به اینکه اندازهٔ حرکت سیال در لایه مرزی مغشوش بیش از لایه مرزی آرام است در نتیجه تبدیل لایه مرزی محل جدایی را به تعویق می اندازد. در جریان آرام جدایی در $\theta = 80°$ و در جریان آشفته در $\theta = 140°$ اتفاق می افتد.



(*b*) Turbulence occurs (Re > 2 × 10^5^)　　(*a*) Laminar flow (Re < 2 × 10^5^)

نیروی مقاوم (F_{D}) وارد بر استوانه از دو مولفه تشکیل می شود مولفه اول ناشی از تنش برشی دیواره در لایه مرزی یا نیروی مقاوم اصطکاکی(Friction Drag) و مولفه دوم بعلت اختلاف فشار در جهت جریان است یا نیروی مقاوم فشاری(Form Drag)

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho V^2 A_f$$

C_Dضریب پسا و A_fمساحت سطح جلویی استوانه است یعنی مساحت سطح تصویر استوانه عمود بر جهت جریان.

در رینولدزهای کم ($R_{\mathrm{e}} < 2$) می توان از اثرات جدایی صرفنظر نمود و نیروی مقاوم اصطکاکی نقش غالب را دارد ولی با افزایش رینولدز تأثیر جدایی و نیروی مقاوم فشاری مهمتر می شود. در $R_{\mathrm{eD}} > 2 \times 10^5$ ضریب پسا بشدت کاهش می یابد که به نوبه خود جدایی و نیروی مقاوم فشاری را کاهش می دهد.

انتقال گرمای جابجایی در استوانه

از نقطه سکون ($\theta = 0$) با افزایش θ بواسطه رشد لایه مرزی آرام Nu_θ کاهش می یابد و کمترین مقدار آن در $\theta = 80°$ روی می دهد. در این نقطه، جدایی اتفاق افتاده و باعث می شود Nu_θ با θ افزایش یابد (بین $\theta = 80$ تا $\theta = 100$) با رشد هرچه بیشتر لایه مرزی مغشوش Nu_θ دوباره شروع به کاهش می کند و در نهایت در $\theta = 140°$ جدایی روی داده و Nu_θ دوباره زیاد می شود. می توان از رابطه تجربی هیلپرت (Hilpert) برای محاسبه انتقال حرارت در استوانه ها استفاده کرد:

$$\boxed{N\bar{u}_D = \frac{\bar{h}D}{k} = C \, \mathrm{Re}_D^m \, \mathrm{Pr}^{0.33}}$$

خواص باید در دمای لایه ای خوانده شود.ثابت های m و C که بستگی به عدد رینولدز دارند را می توان با استفاده از جدول که در وبلاگ موجود است، بدست آورد.

از رابطه هیلپرت می توان برای جریان گاز عمود بر استوانه های با سطح مقطع غیردایره ای هم استفاده کرد.

رابطه دیگر برای استوانه رابطه زوکاسکاس(Zhokauskas) است.این رابطه بصورت زیر است:

$$\begin{array}{|l|}\hline N\bar{u}_D = \dfrac{\bar{h}D}{k} = C \, \mathrm{Re}_D^m \, \mathrm{Pr}^n \left(\dfrac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}_s}\right)^{0.25} \qquad 0.7 < \mathrm{Pr} < 500, 1 < \mathrm{Re}_D < 10^6 \\ \mathrm{Pr} \le 10 \Rightarrow n = 0.37, \mathrm{Pr} > 10 \Rightarrow n = 0.36 \\ \hline \end{array}$$

هنگام استفاده از رابطه زوکاسکاس کلیه خواص باید در T_∞ خوانده شود بجز $\mathrm{Pr_s}$ که درT_s خوانده می شود.C وm از جدول زوکاسکاس با توجه به رینولدز بدست می آیند.

سومین رابطه که برای استوانه مناسب است،رابطه چرچیل و برنشتاین (Bernstein , Churchill) می باشد:

$$\boxed{N\bar{u}_D = \frac{\bar{h}D}{k} = 0.3 + \left[1 + \left(\frac{\mathrm{Re}_D}{282000}\right)^{\frac{5}{8}}\right]^{\frac{4}{5}} \frac{0.62 \, \mathrm{Re}_D^{0.5} \, \mathrm{Pr}^{0.33}}{\left[1 + \left(\dfrac{0.4}{\mathrm{Pr}}\right)^{0.67}\right]^{0.25}}}$$

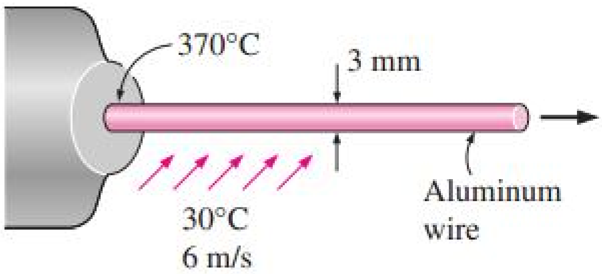
خواص باید در دمای لایه ای خوانده شود.

تمرین

استوانه ای به قطر 25mm و دمای اولیه 150°C با فرو رفتن داخل حوض پر از روغن به دمای 80°C سرد می شود روغن با سرعت $2\,\frac{m}{s}$ عمود بر استوانه جریان دارد. نرخ انتقال گرما بر واحد طول استوانه چقدر است؟

تمرین

یک سیم آلومینیومی به قطر3mm که در دمای370C قرار دارد در معرض جریان هوایی به دمای 30C و سرعت6m/s که بطور عمود بر آن جریان دارد، واقع است.نرخ انتقال حرارت از سیم به هوا را به ازای واحد طول سیم حساب کنید.



انتقال حرارت از کره(Sphere)

برای یک کره می توان از رابطه ویتاکر(Whitaker)استفاده کرد،این رابطه و شرایط استفاده از آن بصورت زیر است:

$$\boxed{\begin{aligned} &N\bar{u}_D=\frac{\bar{h}D}{k}=2+(0.4\mathrm{Re}_D^{0.5}+0.06\mathrm{Re}_D^{0.67})\mathrm{Pr}^{0.4}(\frac{\mu}{\mu_s})^{0.25}\\ &0.71<\mathrm{Pr}<380,3.5<\mathrm{Re}<7.6\times10^4,1<\frac{\mu}{\mu_s}<3.2\end{aligned}}$$

کلیه خواص در T_∞ خوانده شده بجز μ_s که در T_s خوانده می شود.

انتقال گرما از قطرات مایعی که سقوط آزاد می کنند حالت خاصی از انتقال گرمای جابجائی در کره است.در این حالت از رابطه رانز و مارشال(Ranz , Marshall) استفاده می شود:

$$\boxed{N\bar{u}_D=\frac{\bar{h}D}{k}=2+0.6\mathrm{Re}_D^{0.5}\,\mathrm{Pr}^{0.33}}$$

کلیه خواص در T_∞ خوانده می شوند.

بمنظور محفوظ کردن اثرات نوسان و اعوجاج قطر D می توان رابطه فوق را بصورت زیر اصلاح نمود:

$$N\bar{u}_D = \frac{\bar{h}D}{k} = 2 + 0.6\,\mathrm{Re}_D^{0.5}\,\mathrm{Pr}^{0.33}\left[25\left(\frac{x}{D}\right)^{-0.7}\right]$$

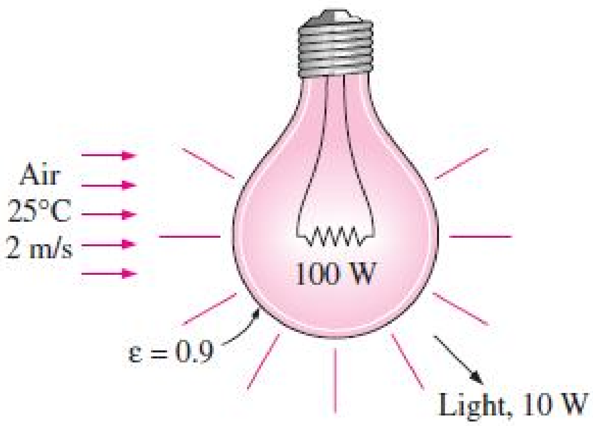
X فاصله سقوط آزاد از حالت سکون است.خواص در T_∞ منظور می شوند.

تمرین

هوای اتمسفر با دمای 25°C و سرعت $0.5\frac{m}{s}$ روی حباب یک لامپ با دمای سطح 140°C جریان دارد. حباب را می توان بصورت کره ای به قطر 50mm تقریب زد. نرخ انتقال گرمای جابجایی به جریان هوا را محاسبه کنید.

تمرین

یک لامپ حبابی(کروی) به قطر10cm توسط یک فن خنک می شود. فن، هوای به دمای25C را با سرعت 2m/s بسوی حباب می فرستد.دمای محیط را 25C و ضریب صدور شیشه لامپ را 0.9 در نظر بگیرید و فرض کنید 10درصد از انرژی تولیدی در حباب، بصورت نور از شیشه خارج می شود.دمای تعادل حباب شیشه ای را بیابید.($\sigma = 5.67\times10^{-8}\frac{W}{m^2K^4}$)



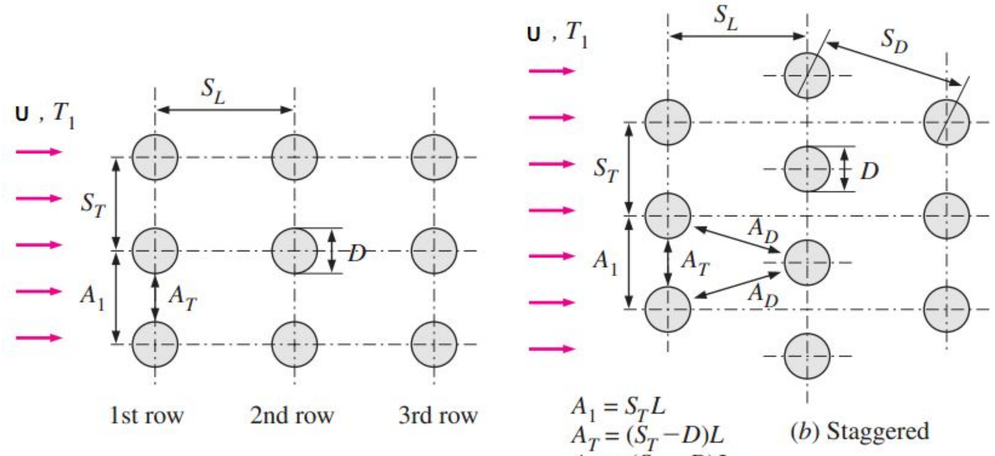
جریان عمود بر مجموعه لوله ها (Banks of Tubes)

انتقال گرما به و یا از مجموعهٔ لوله های عمود بر جریان در کاربردهای بیشمار صنعتی مانند تولید بخار در دیگ بخار یا سرمایش هوا و یا دستگاههای تهویه مطبوع وجود دارد. بطور کلی در این مجموعه ها یک سیال روی لوله ها و سیال دیگر با دمای متفاوت در داخل لوله ها جریان دارد.

دو نوع آرایش مهم ترکیب لوله ها وجود دارد:

- آرایش مستطیلی(In-line)
- آرایش مثلثی(Staggered)

که ترکیب هر آرایش با قطر لوله D گام عرضی S_T و گام طولی S_L مشخص می شود.



(a) In-line

(b) Staggered

ضریب انتقال گرمای مربوط به یک لوله توسط وضعیت آن در مجموعه تعیین می شود. این ضریب برای لوله ای که در اولین ردیف قرار دارد تقریباً با ضریب لوله واحد عمود بر جریان برابر است ولی لوله هایی که در ردیف های داخلی قرار دارند دارای ضریب انتقال گرمای بزرگتری اند.زیرا لوله های واقع در چند ردیف اول، اغتشاش جریان را افزایش داده و باعث می شوند که ضریب انتقال گرما برای لوله های بعدی زیاد شود ولی با پایدار شدن شرایط انتقال گرما، ضریب جابجایی برای لوله های بعد از ردیف چهارم یا پنجم خیلی کم تغییر می کند.

گریمیسون (Grimison) رابطه زیر را برای جریان هوا در مجموعه ای که 10 ردیف یا بیشتر لوله دارد بدست آورد: $(N_L \geq 10)$

$$\boxed{\overline{Nu}_D = C_1 Re_{D,max}^m \qquad \begin{bmatrix} N_L \geq 10 \\ 2000 < Re_{D,max} < 40000 \\ Pr = 0.7 \end{bmatrix}}$$

C_1 و m بسته به $\frac{S_L}{D}$ و $\frac{S_T}{D}$ از جدول بدست می آیند.عبارات داخل کروشه شرایط استفاده از رابطه را نشان می دهد.

$$Re_{D,max} = \frac{\rho V_{max} D}{\mu}$$

برای سایر سیال ها می توان رابطه زیر را بکار برد:

$$\boxed{\overline{Nu}_D = 1.13 C_1 Re_{D,max}^m Pr^{\frac{1}{3}} \qquad \begin{bmatrix} N_L \geq 10 \\ 2000 < Re_{D,max} < 40000 \\ Pr \geq 0.7 \end{bmatrix}}$$

خواص در T_f باید خوانده شود.

اگر $N_L < 10$ باشد ضریب تصحیح بصورت زیر اعمال می شود: $\overline{Nu}_D|_{(N_L<10)} = C_2 \overline{Nu}_D|_{(N_L \geq 10)}$

C_2 که تابع N_L است از جدول بدست می آید.

در آرایش مستطیلی $V_{max} = \frac{S_T}{S_T - D} V$ که در صفحه عرضی A_1 رخ می دهد.

در آرایش مثلثی اگر $S_D = \left[S_L^2 + \left(\frac{S_T}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} < \frac{S_T+D}{2}$ آنگاه V_{max} در صفحه A_2 رخ می دهد که در آن صورت می توان از رابطه زیر مقدار آن را بدست آورد:

$$V_{max} = \frac{S_T}{2(S_D - D)} V$$

چنانچه سرعت ماکزیمم در صفحه A_1 رخ دهد می توان V_{max} را از رابطه قبلی بدست آورد.

رابطه زوکاسکاس(Zhukauskas) در دسته لوله ها بصورت زیر است:

$$\boxed{\overline{Nu}_D = C Re_{D,max}^m Pr^{0.36} \left(\frac{Pr}{Pr_s}\right)^{\frac{1}{4}} \quad \left[\begin{array}{c} N_L \geq 20 \\ 1000 < Re_{D,max} < 2 \times 10^6 \\ 7 < Pr < 500 \end{array}\right]}$$

C و m از جدول مربوطه خوانده می شوند.

در این رابطه خواص در میانگین دماهای ورودی و خروجی سیال خوانده می شوند، بجز Pr_s که در T_s حساب می شود.

$$N_L < 20 \Rightarrow \overline{Nu}_D|_{N_L<20} = C_2 \overline{Nu}_D|_{N_L \geq 20}$$

C_2 از جدول بدست می آید.

به ازای مقادیر کوچک S_L ردیف های بالادست نظیر حفاظ در برابر جریان به طرف ردیف های پایین دست عمل کرده و تأثیر انتقال گرما معکوس می شود. زیرا قسمت اعظم سطح لوله در مسیر جریان اصلی قرار نمی گیرد. بدین علت عملکرد مجموعه لوله ها با آرایش مستطیلی با $\frac{S_T}{S_L} > 0.7$ نامطلوب است ولی در آرایش مثلثی مسیر جریان اصلی دارای پیچ و خم بوده و قسمت بیشتری از سطح لوله های پایین دست در مسیر جریان باقی می ماند چون دمای سیال هنگام عبور از مجموعه لوله ها تا حد زیادی تغییر می کند.

بنابراین اگر از $\Delta T = T_s - T_\infty$ بعنوان اختلاف دما در قانون سرمایش نیوتن استفاده شود، نرخ انتقال گرما بالاتر از آنچه که هست پیش بینی خواهد شد. شکل مناسبی از ΔT بصورت اختلاف دمای متوسط لگاریتمی (Log Mean Temperature Difference) بصورت زیر تعریف می شود:

$$\boxed{\Delta T_{lm} = \frac{(T_s - T_i) - (T_s - T_0)}{\ln[(T_s - T_i)/(T_s - T_0)]}}$$

T_i دمای سیال به هنگام ورود و T_0 دمای سیال به هنگام خروج است.

دمای خروجی را می توان با استفاده از رابطه زیر محاسبه کرد:

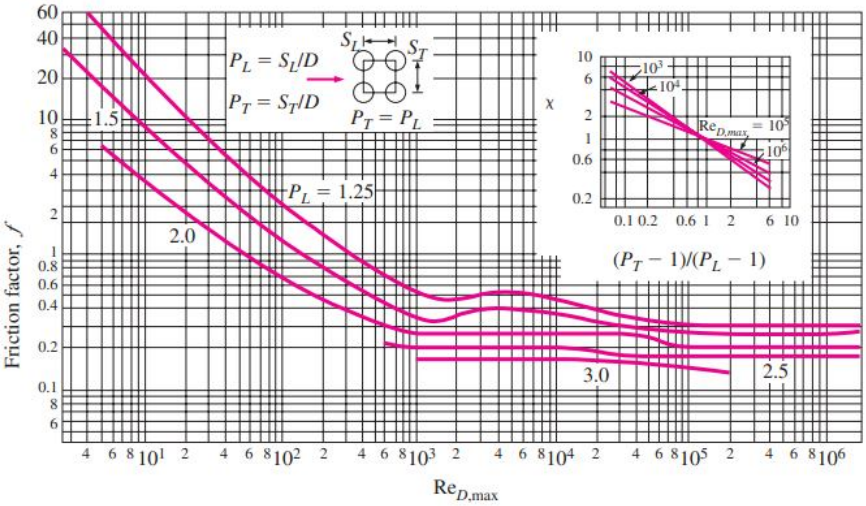
$$\boxed{\frac{T_s - T_0}{T_s - T_i} = \exp\left(-\frac{\pi D N \bar{h}}{\rho V N_T S_T C_P}\right)}$$

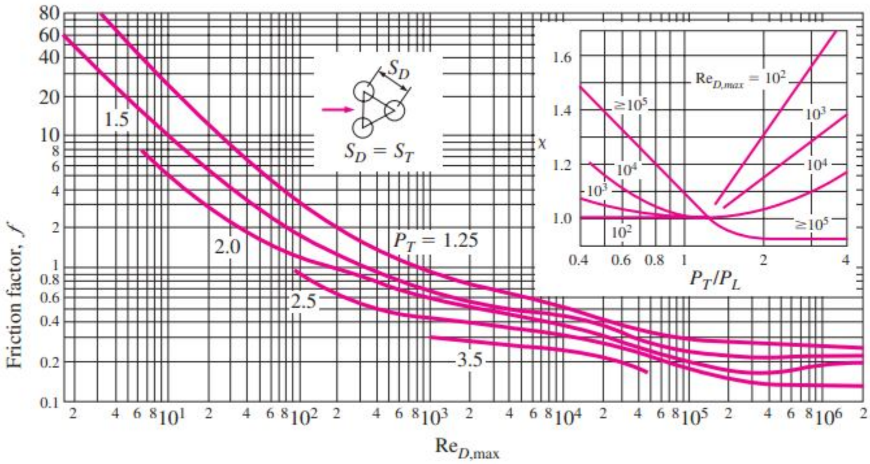
V سرعت N تعداد کل لوله ها وN_T تعداد لوله ها در هر ردیف است.تمام خواص باید در دمای میانگین سیال ورودی و خروجی خوانده شود بجز چگالی که در دمای سیال ورودی خوانده می شود، نرخ انتقال گرما و افت فشار بترتیب از روابط زیر بدست می آید:

$$\boxed{q = N\left(\bar{h} \pi D L \Delta T_{lm}\right)}$$

$$\boxed{\Delta P = N_L X\left(\frac{\rho V_{max}^2}{2}\right)f}$$

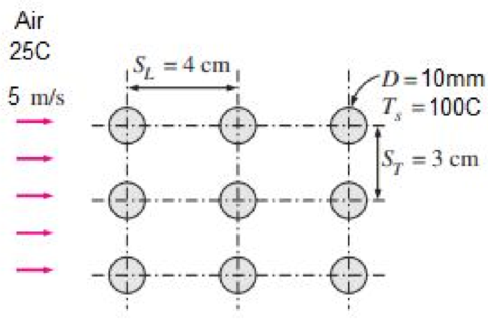
در این رابطه f ضریب اصطکاک و X ضریب تصحیح است که بسته به چیدمان لوله ها از نمودارهای زیر خوانده می شوند.





تمرین

برای گرم کردن هوای با فشار 1atm و دمای 25°C از یک پیشگرمکن استفاده می شود که در آن بخار در حال میعان با دمای 100°C در داخل مجموعه لوله ها جریان دارد. هوا با سرعت $5\,\frac{m}{s}$ به طور عمود بر لوله ها حرکت می کند. طول هر لوله 1m و قطر خارجی آن 10mm است. مجموعه دارای 196 لوله است که تحت آرایش مستطیلی به فواصل $S_T = 3cm, S_L = 4cm$ قرار گرفته اند. نرخ کلی انتقال گرما به هوا چقدر است؟ افت فشار جریان هوا را بدست آورید.



11

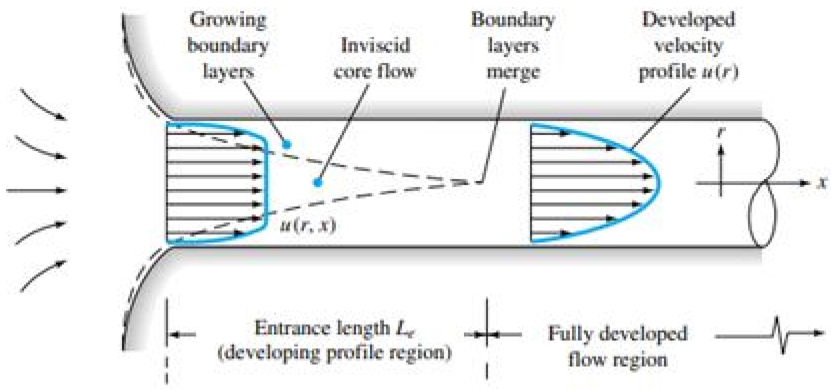
فصل ششم: جابجایی اجباری داخلی(Internal Forced Convection)

جریان داخلی(Internal Flow)

جریان داخلی جریانی است که در آن سیال توسط سطح جامد محصور می شود. بنابراین لایه مرزی نمی تواند آزادانه رشد نماید نظیر جریان در لوله ها(Pipes) و مجراها(Ducts).

ناحیه ورودی و ناحیه کاملاً توسعه یافته(Entrance Region & Fully Developed Region)

مطابق شکل زیر جریان آرامی را در یک لوله به شعاع r_0 که سیال با سرعت یکنواخت وارد آن می شود در نظر بگیرید. هنگامیکه سیال با سطح در تماس قرار می گیرد، اثرات لزجت ظاهر شده و لایه مرزی با افزایش x رشد می کند. این گسترش منجر به باریک شدن ناحیه جریان غیرلزج شده و در نهایت لایه های مرزی در محور لوله به هم می رسند بدنبال این پیوستگی اثرات لزجت در سرتاسر مقطع گسترش یافته و پروفیل سرعت با افزایش x تغییر نمی کند. به این جریان، جریان کاملاً توسعه یافته گفته می شود و فاصله ورودی تا محلی که این جریان حاصل می شود طول ورودی هیدرودینامیکی(Hydrodynamic Entrance Region) نام دارد که آن را با $X_{fd,h}$ یا L_e نشان می دهند.پروفیل سرعت کاملاً توسعه یافته برای جریان آرام در یک لوله سهمی شکل است. در جریان مغشوش بواسطه اختلاط مغشوش در جهت شعاع این پروفیل پهنتر است.



در لوله ها عدد رینولدز را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathrm{Re_D} = \frac{\rho u_m D}{\mu}$$

که در آن u_m سرعت میانگین سیال و D قطر لوله است.تبدیل جریان آرام به گذرا در رینولدز 2300 صورت می گیرد و در رینولدز10000 جریان کاملا آشفته خواهد بود. طول ناحیه ورودی را بسته به رژیم جریان می توان از روابط زیر بدست آورد:

$$\left.x_{fd,h}\right)_{lam} \approx 0.05DRe_D \qquad \left.x_{fd,h}\right)_{\mathrm{turb}} \approx 10\mathrm{D}$$

دبی جرمی با واحد کیلوگرم بر ثانیه یعنی مقدار جرمی که در واحد زمان از لوله می گذرد برابر است با:

$$\dot{m} = \rho u_m A_c$$

که A_c مساحت سطح مقطع لوله(عمود بر جریان)است.

از طرفی چون $\dot{m}=\int \rho u dA_c$ در نتیجه سرعت میانگین سیال برای یک لوله با سطح مقطع دایره($A_c=\pi r_0^2, dA_c=2\pi r dr$)بصورت زیر بدست می آید:

$$u_m=\frac{\int \rho u dA_c}{\rho A_c}=\frac{2\pi\rho}{\rho\pi r_0^2}\int_0^{r_0} urdr=\frac{2}{r_0^2}\int_0^{r_0} urdr$$

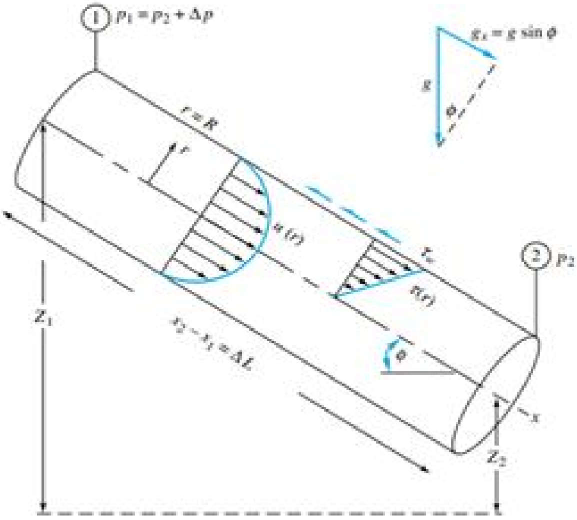
$$\boxed{u_m=\frac{2}{r_0^2}\int_0^{r_0} urdr}$$

که با معلوم بودن پروفیل سرعت $u(r)$ در یک مقطع خاص می توان u_m را در آن مقطع تعیین کرد.

عدد رینولدز بر حسب دبی جرمی از رابطه زیر بدست می آید:

$$Re=\frac{4\dot{m}}{\pi D\mu}$$

ملاحظات سیالاتی جریان در ناحیه کاملاً توسعه یافته



معادله اندازه حرکت در مختصات استوانه ای بصورت زیر است:

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{dP}{dx}+\rho g_x+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau)$$

در ناحیه توسعه یافته $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ و تنش برشی و سرعت تنها تابع rاست.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad g_x=g\sin\phi,\quad \sin\phi=-\frac{dz}{dx}$$

$$-\frac{dP}{dx}-\rho g\frac{dz}{dx}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\tau)=0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\tau) = \frac{d}{dx}(P + \rho gz) = A$$

چون تغییرات فشار و ارتفاع در راستای محور لوله ثابت است لذا آن را برابر یک مقدار ثابت در نظر گرفته ایم.

$$\frac{dP}{dx} = cte, \frac{dz}{dx} = cte \Rightarrow \frac{d}{dx}(P + \rho gz) = A$$

سمت چپ تساوی را برابر مقدار ثابت قرار داده و معادله را حل می کنیم.

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\tau) = A \Rightarrow \frac{d}{dr}(r\tau) = Ar$$

برای جریان آرام رابطه تنش برشی بر حسب گرادیان سرعت بصورت زیر می باشد:

$$\tau = \mu\frac{du}{dr}$$

$$\frac{d}{dr}(r\tau) = Ar \Rightarrow \frac{d}{dr}(r\mu\frac{du}{dr}) = Ar \Rightarrow \frac{d}{dr}(r\frac{du}{dr}) = \frac{Ar}{\mu} \Rightarrow r\frac{du}{dr} = \frac{Ar^2}{2\mu} + C_1 \Rightarrow \frac{du}{dr} = \frac{Ar}{2\mu} + \frac{C_1}{r} \Rightarrow$$

$$u(r) = \frac{Ar^2}{4\mu} + C_1 \ln r + C_2$$

برای تعیین ثابتها از دو شرط مرزی باید استفاده کنیم.

ابتدا می دانیم در مرکز لوله سرعت نمی تواند بینهایت شود و باید مقدار محدودی(Bounded)داشته باشد و چون

$$\lim_{r \to 0} \ln r = \infty$$

لذاC_1 باید صفر شود.از طرفی طبق شرط عدم لغزش سرعت در جداره برابر صفر است بنابراین:

$$at \qquad r = R : u = 0 \Rightarrow \frac{AR^2}{4\mu} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{AR^2}{4\mu}$$

با قرار دادن این ثابتها توزیع سرعت بصورت زیر بدست می آید:

$$u(r) = \frac{Ar^2}{4\mu} - \frac{AR^2}{4\mu} = \frac{A}{4\mu}(r^2 - R^2) = -\frac{AR^2}{4\mu}(1 - \frac{r^2}{R^2})$$

و چون $A = \frac{d}{dx}(P + \rho gz)$ لذا:

$$\boxed{u(r) = -\frac{R^2}{4\mu}\frac{d}{dx}(P + \rho gz)[1 - (\frac{r}{R})^2]}$$

ماکزیمم سرعت در مرکز لوله اتفاق می افتد($r=0$) در نتیجه $u_{\max}=-\frac{R^2}{4\mu}\frac{d}{dx}(P+\rho gz)$

پروفیل سرعت بر حسب سرعت ماکزیمم بصورت زیر در می آید:

$$u(r)=u_{\max}[1-(\frac{r}{R})^2]$$

از مکانیک سیالات۲ بیاد داریم در جریان آرام سرعت ماکزیمم ($u_{\max}$) در لوله دو برابر سرعت متوسط (u_m) است. بنابراین:

$$\boxed{u(r)=2u_m[1-(\frac{r}{R})^2]}$$

گرادیان فشار (Pressure Gradient) و تنش برشی(Shear Stress) در جریان کاملاً توسعه یافته از روابط زیر بدست می آیند:

$$\frac{dP}{dx}=f\rho\frac{u_m^2}{2D} \qquad \tau_s=\frac{1}{2}C_f\rho u_m^2$$

در این روابط C_f ضریب اصطکاک فانینگ(fanning) یا دارسی(Darcy) و f ضریب اصطکاک مودی(Moody) می باشند که برای جریان آرام برای سطوح صاف یا زبر (در جریان آرام زبری تاثیری بر ضریب اصطکاک ندارد) مطابق با روابط زیر بدست می آیند:

$$C_f=\frac{f}{4} \qquad f=\frac{64}{Re_D}$$

برای جریان مغشوش کاملاً توسعه یافته تجزیه و تحلیل ها خیلی پیچیده تر بوده و در نهایت باید به نتایج تجربی متوسل شد. ضرایب اصطکاک برای گسترهٔ وسیعی از اعداد رینولدز در نمودار مودی ارائه شده است.روابط زیر برای سطح صاف و در جریان توسعه یافته و مغشوش صادق است و دقت داشته باشید خواص در دمای لایه ای باید محاسبه شود.

$$f=0.316Re_D^{-0.25} \qquad Re_D\le 2\times10^4$$
$$f=0.184Re_D^{-0.2} \qquad Re_D\ge 2\times10^4$$

و در حالتی که جریان مغشوش و سطح زبر باشد از رابطه:

$$f=[-1.8\log(\frac{6.9}{Re}+(\frac{\varepsilon}{3.76D})^{1.11})]^{-2}$$

مقدار ضریب اصطکاک بدست می آید که εدر این رابطه ارتفاع زبری است که به جنس لوله بستگی دارد.همچنین اختلاف فشار بین دو نقطه در یک لوله از رابطه زیر بدست می آید:

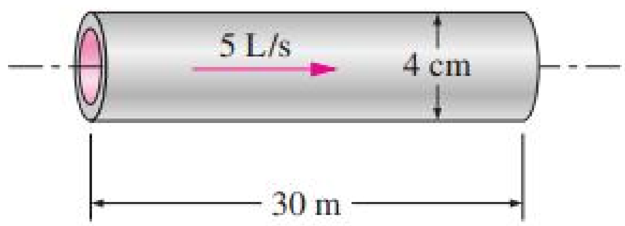
$$\Delta P=\int_{P_1}^{P_2}dP=f\frac{\rho u_m^2}{2D}\int_{x_1}^{x_2}dx=f\frac{\rho u_m^2}{2D}(x_2-x_1)$$

تمرین

آب($\rho=999.1kg/m^3,\mu=1.138\times10^{-3}kg/m.s$)در دمای15C با نرخ حجمی5L/s در لوله ای افقی به قطر4cm و طول30m

جریان دارد.لوله از فولاد ضدزنگ($\varepsilon = 0.002mm$) ساخته شده است،مطلوبست:

- الف) افت فشار در لوله
- ب) توان مورد نیاز پمپ



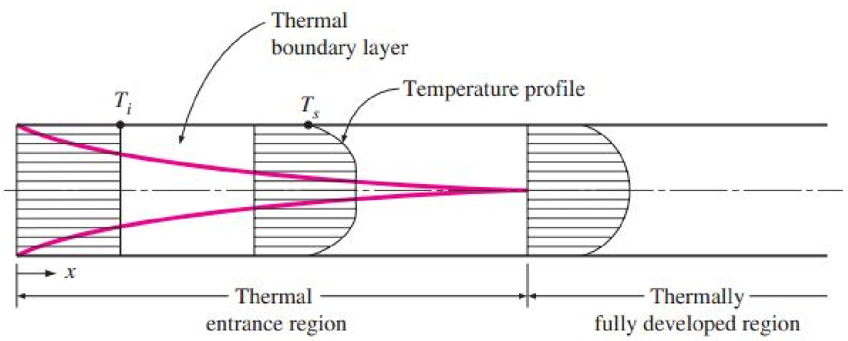
تمرین

آب با دمای 27C و سرعت میانگین 1m/s در لوله چدنی($\varepsilon = 0.26mm$) به قطر 0.25m و طول 1km جریان دارد.

- الف)اگر سطح لوله تمیز باشد،افت فشار در طول لوله و توان مورد نیاز پمپ را تعیین کنید.
- ب)اگر زبری سطح لوله بواسطه آلودگی تا 25% افزایش یابد،افت فشار و توان مورد نیاز پمپ چقدر خواهد بود؟
- ج)اگر سطح لوله کاملا صاف باشد(لوله از جنس شیشه باشد)، افت فشار در طول لوله و توان مورد نیاز پمپ را تعیین کنید.

ملاحظات گرمایی(Thermal Considerations)

اگر سیال با دمای یکنواختی T_i که بیشتر از دمای سطح است وارد لوله شکل زیر شود انتقال گرمای جابجائی روی داده و رشد لایه مرزی گرمایی(Thermal Boundary Layer) شروع می شود. همچنین اگر شرایط سطح لوله در دمای یکنواخت (T_S ثابت) باشد یا گرمای یکنواخت (q''_x ثابت) نگهداشته شود نهایتاً شرایط کاملاً توسعه یافته گرمایی(Thermally Fully Developed) برقرار خواهد شد.



شکل پروفیل توسعه یافته دما بسته به یکنواخت بودن دمای سطح یا شار گرما فرق خواهد کرد.

برای جریان آرام طول ورودی گرمایی از رابطه زیر بدست می آید:

$$x_{fd,t})_{\mathrm{lam}} \approx 0.05 \mathrm{Re_D D Pr}$$

برای سیالات با پرانتل های کوچکتر از یک $x_{\mathrm{fd,t}} < x_{\mathrm{fd,h}}$ و برای سیالات با پرانتلهای بزرگتر از یک $x_{\mathrm{fd,h}} < x_{\mathrm{fd,t}}$. برای روغن ها که $Pr \geq 100$ مقدار $x_{\mathrm{fd,h}}$ خیلی کوچکتر از $x_{\mathrm{fd,t}}$ است و می توان فرض کرد که در سرتاسر ناحیه ورودی گرمایی، پروفیل سرعت کاملاً توسعه یافته است.

در جریان مغشوش شرایط مستقل از عدد پرانتل بوده و می توان فرض کرد: $x_{fd,t})_{\mathrm{turb}} \approx 10\mathrm{D}$

دمای میانگین (Mean Temperature)

با معلوم نبودن دمای ثابت جریان آزاد ملزم به استفاده از دمای میانگین هستیم. دمای میانگین (یا حجمی) سیال در یک سطح مقطع مشخص برحسب انرژی گرمایی انتقال یافته توسط سیال هنگام عبور آن از سطح مقطع تعریف می شود. یعنی:

$$\dot{E}_{\mathrm{t}} = \int_{A_c} \rho u C_v \, T \, dA_c$$

از طرفی: $\dot{E}_{\mathrm{t}} = \dot{m} C_v T_m$ در نتیجه:

$$T_m = \frac{\int_{A_c} \rho u C_v \, T \, dA_c}{\dot{m} C_v}$$

برای جریان تراکم ناپذیر در لوله دایره ای($A_c = \pi r_0^2, dA_c = 2\pi r dr$) با C_v ثابت رابطه فوق بصورت زیر ساده می شود:

$$\boxed{T_m = \frac{2}{u_m r_0^2} \int_0^{r_0} u T r dr}$$

براساس این دما می توان، قانون سرمایش نیوتن(Newtons Law of Cooling) را چنین تعریف نمود:

$$\boxed{q''_s = h(T_s - T_m)}$$

اگر انتقال گرما از سطح به سیال باشد $(T_s > T_m)$ مقدار T_m با x افزایش می یابد و برعکس اگر $T_s < T_m$، T_m کم می شود. هرگاه انتقال گرما وجود داشته باشد $\frac{dT_m}{dx}$ هرگز صفر نخواهد شد.

تمرین

طول ورودی سرعت و گرمایی را برای روغن،آب و جیوه که با سرعت میانگین $u_m = 5\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}}$ و دمای میانگین $T_m = 27\mathrm{C}$ در لوله ای به قطر25mm جریان دارند،مقایسه کنید.

شرایط کاملاً توسعه یافته

چون دمای سیال بطور پیوسته برحسب x تغییر می کند این سؤال پیش می آید که چه وقت شرایط کاملاً توسعه یافتهٔ گرمایی برقرار خواهد شد. با معرفی اختلاف دمای بی بعد(Dimensionless Temperature) به شکل $\frac{T_s-T}{T_s-T_m}$ شرایطی وجود خواهد داشت که در آن نسبت مزبور مستقل از x خواهد بود. یعنی هرچند که پروفیل دمای T(r) با x تغییر می کند ولی شکل نسبی پروفیل دستخوش تغییر زیادی نمی شود و در این صورت به جریان، کاملاً توسعه یافته گرمایی گفته می شود.

در حالت کاملا توسعه یافته رابطه زیر برقرار است:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{T_s(x)-T(r,x)}{T_s(x)-T_m(x)}\right]_{fd,t}=0}$$

T_s دمای سطح لوله، T دمای موضعی سیال و T_m دمای میانگین سیال در سطح مقطع لوله است.

چون نسبت دما مستقل از x است مشتق آن نیز نسبت به r باید مستقل از x باشد در نتیجه:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{T_s-T}{T_s-T_m}\right)_{r=r_0}=\frac{-\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)|_{r=r_0}}{T_s-T_m}\neq f(x)$$

با جایگذاری $\frac{\partial T}{\partial r}$ از قانون فوریه که بصورت زیر نوشته می شود: $q"_s=-k\frac{\partial T}{\partial r}|_{r=r_0}$ داریم:

$$\frac{q''_s/k}{T_s-T_m}\neq f(x),\quad q''_s=h(T_s-T_m)\Rightarrow\frac{h(T_s-T_m)/k}{T_s-T_m}\neq f(x)\Rightarrow\frac{h}{k}\neq f(x)$$

$$\boxed{\frac{h}{k}\neq f(x)}$$

یعنی در جریان توسعه یافته گرمایی یک سیال با خواص ثابت، ضریب جابجائی موضعی ثابت بوده و مستقل از x است.

همانطوریکه از شکل دیده می شود چون ضخامت لایه مرزی گرمایی(Thermal Boundary Layer Thickness) در ورودی لوله صفر است ضریب جابجایی در x = 0 بی نهایت بزرگ است. با رشد لایه مرزی گرمایی، h سریعاً کم می شود تا اینکه به مقدار مربوط به شرایط کاملاً توسعه یافته برسد.

فرض می کنیم شار ثابت $q"_s$ بر سطح لوله بتابد:

$$q"_s=h(T_s-T_m)\Rightarrow\frac{dq"_s}{dx}|_{fd,t}=h\left(\frac{dT_s}{dx}|_{fd,t}-\frac{dT_m}{dx}|_{fd,t}\right)\Rightarrow 0=h\left(\frac{dT_s}{dx}|_{fd,t}-\frac{dT_m}{dx}|_{fd,t}\right)\Rightarrow\frac{dT_s}{dx}|_{fd,t}=\frac{dT_m}{dx}|_{fd,t}$$

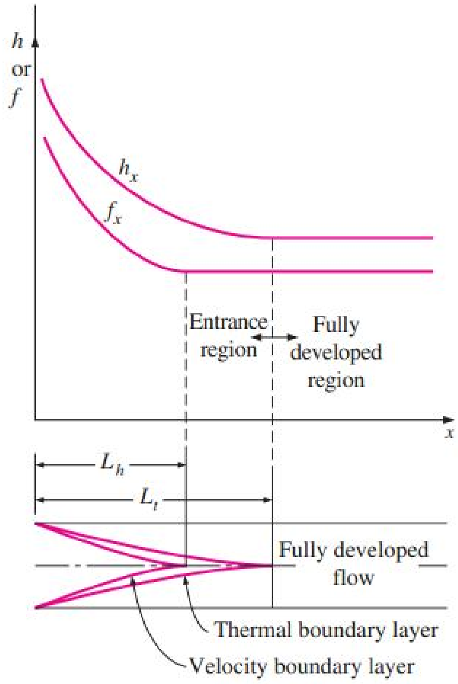
از طرفی در حالت توسعه یافته دمایی داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{T_s(x)-T(r,x)}{T_s(x)-T_m(x)}\right]_{fd,t}=0\Rightarrow\frac{\partial T}{\partial x}|_{fd,t}=\frac{dT_s}{dx}|_{fd,t}-\frac{T_s-T}{T_s-T_m}\frac{dT_s}{dx}|_{fd,t}+\frac{T_s-T}{T_s-T_m}\frac{dT_m}{dx}|_{fd,t}$$

و چون $\frac{dT_s}{dx}|_{fd,t}=\frac{dT_m}{dx}|_{fd,t}$ نتیجه می شود:

$$\frac{\partial T}{\partial x}|_{fd,t}=\frac{dT_s}{dx}|_{fd,t}=\frac{dT_m}{dx}|_{fd,t}$$

بنابراین گرادیان دمای محوری مستقل از موقعیت شعاعی است.

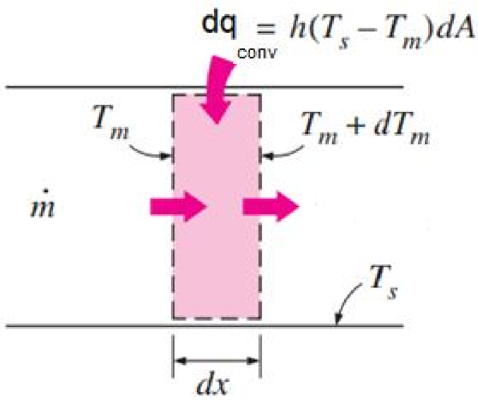


برای حالت دمای ثابت سطح $\frac{dT_s}{dx} = 0$ معادله فوق نتیجه می دهد:

$$\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{fd,t} = \frac{T_s - T}{T_s - T_m}\,\frac{dT_m}{dx}\Big|_{fd,t}$$

موازنه انرژی(Energy Balance)

جریان در لوله شکل زیر را در نظر بگیرید. سیال با نرخ جریان ثابت $\dot{m}$ حرکت کرده و انتقال گرمای جابجائی در سطح داخلی لوله روی می دهد.



با نوشتن قانون بقای انرژی روی حجم کنترل دیفرانسیلی شکل فوق خواهیم داشت:

($\dot{m}C_vT_m$ نرخ انرژی داخلی و $\dot{m}Pv$ نرخ انجام کار است)

$$dq_{Conv} + \dot{m}(C_VT_m + Pv) - \left[\dot{m}(C_VT_m + Pv) + \dot{m}\frac{d(C_VT_m+Pv)}{dx}dx\right] = 0$$

یا

$$dq_{\mathrm{Conv}} = \dot{\mathrm{m}}\mathrm{d}(\mathrm{C}_V\mathrm{T_m} + \mathrm{Pv})$$

یعنی نرخ انتقال گرمای جابجائی به سیال باید با مجموع نرخ افزایش انرژی گرمایی سیال و نرخ خالص کار انجام شده توسط سیال در حجم کنترل برابر باشد.

اگر سیال را یک گاز ایدال در نظر بگیریم،چون:

$\mathrm{Pv} = \mathrm{RT}$ و $C_P = \mathrm{C}_V + \mathrm{R}$

در نتیجه:

$$dq_{\mathrm{Conv}} = \dot{\mathrm{m}}\mathrm{d}(\mathrm{C}_V\mathrm{T_m} + \mathrm{RT_m}) \Rightarrow dq_{\mathrm{conv}} = \dot{\mathrm{m}}\mathrm{d}(\mathrm{C_V} + \mathrm{R})\mathrm{T_m} \Rightarrow dq_{\mathrm{Conv}} = \dot{\mathrm{m}}\mathrm{C_P}\mathrm{dT_m} \Rightarrow q_{\mathrm{conv}} = \dot{\mathrm{m}}\mathrm{C_P}(\mathrm{T_{m0}} - \mathrm{T_{mi}})$$

$$\boxed{q_{\mathrm{conv}} = \dot{\mathrm{m}}\mathrm{C_P}(\mathrm{T_{m0}} - \mathrm{T_{mi}})}$$

q_{conv} نرخ کلی انتقال گرما در لوله است.

اگر سیال یک مایع باشد،چون مایعات تراکم ناپذیرند بنابراین:

$$\mathrm{dv} = 0$$

در نتیجه:

$$dq_{\mathrm{Conv}} = \dot{m}\mathrm{C_V}\mathrm{dT_m}$$

اما برای مایعات $\mathrm{C_V} = \mathrm{C_P}$

و در نتیجه $dq_{\mathrm{Conv}} = \dot{m}\mathrm{C_P}\mathrm{dT_m}$ و از آنجا $q_{\mathrm{conv}} = \dot{m}\mathrm{C_P}(\mathrm{T_{m0}} - \mathrm{T_{mi}})$ که همان نتیجه ای شد که برای گازها بدست آمد.بنابراین صرفنظر از نوع سیال برای جریان داخل لوله رابطه فوق همواره صادق است.

$$dq_{\mathrm{conv}} = \dot{m}\mathrm{C_P}\mathrm{dT_m} \Rightarrow \frac{\mathrm{dq_{conv}}}{\mathrm{dx}} = \frac{\dot{m}\mathrm{C_P}\mathrm{dT_m}}{\mathrm{dx}}$$

از طرف دیگر:

$$dq_{\mathrm{conv}} = \mathrm{q"_s P dx} \Rightarrow \frac{\mathrm{dq_{conv}}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{q"_s P}$$

از مقایسه دو رابطه فوق:

$$\mathrm{q"_s P} = \frac{\dot{m}\mathrm{C_P}\mathrm{dT_m}}{\mathrm{dx}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{dT_m}}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{q"_s P}}{\dot{m}\mathrm{C_P}}}$$

و چون:

$$\mathrm{q"_s} = \mathrm{h}(\mathrm{T_s} - \mathrm{T_m})$$

با جایگذاری خواهیم داشت:

$$\boxed{\frac{\mathrm{dT_m}}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{P}}{\dot{m}\mathrm{C_P}}\mathrm{h}(\mathrm{T_s} - \mathrm{T_m})}$$

اگر $\mathrm{T_s} > \mathrm{T_m}$ گرما به سیال منتقل شده و $\mathrm{T_m}$ با x افزایش می یابد و اگر $\mathrm{T_s} < \mathrm{T_m}$ حالت عکس رخ می دهد. در رابطه بالا $\frac{P}{\dot{m}\mathrm{C_P}}$ ثابت می باشد و در ناحیه کاملاً توسعه یافته h نیز ثابت است و هرچند $\mathrm{T_s}$ ثابت است ولی $\mathrm{T_m}$ همیشه با x تغییر می کند.

تمرین

یک کلکتور خورشیدی با صفحه تخت برای گرم کردن جریان هوای اتمسفر در داخل یک کانال به کار رفته است.سطح پایین کانال کاملا عایقبندی شده و سطح بالای آن در معرض شار گرمای یکنواخت q_0'' که ناشی از اثر خالص جذب تشعشع خورشید و تبادل گرما بین صفحات جاذب و پوشش است قرار دارد. عرض و طول کانال را بترتیب w و L در نظر بگیرید.

- الف) با انتخاب حجم کنترل دیفرانسیلی،معادله ای بدست آورید که دمای میانگین هوا $T_m(x)$ را بر حسب فاصله در امتداد کانال تعیین کند.با حل این معادله عبارتی برای دمای میانگین هوای خروجی از کلکتور بدست آورید.
- ب) اگر هوا تحت شرایط $\dot{m} = 0.1\frac{kg}{s}$ و $T_{mi} = 40C$ وارد کانال شود و اگر $L = 3m$ ،$w = 1m$ ،$q_0'' = 700\frac{W}{m^2}$ باشد،دمای خروجی هوا را محاسبه کنید.گرمای ویژه هوا برابر $C_P = 1008\frac{J}{kg.K}$ است.

تمرین

یک میله استوانه ای سوخت هسته ای را بطول L و قطر D در نظر بگیرید که داخل لوله هم محور با آن قرار گرفته است.آب تحت فشار با نرخ $\dot{m}$ در ناحیه حلقوی بین میله و لوله جریان داشته و سطح خارجی لوله کاملا عایقبندی شده است.تولید گرما در میله سوخت روی می دهد و نرخ تولید حجمی گرما بطور سینوسی در امتداد میله تغییر می کند.یعنی $\dot{q}(x)=\dot{q}_0\sin(\frac{\pi x}{L})$ که در آن $\dot{q}_0$ ثابت است.ضریب جابجایی h بین سطح میله و آب یکنواخت فرض می شود.

- الف) عبارتهایی برای شار گرمای موضعی $q''(x)$ و کل انتقال گرمای q از میله سوخت به آب پیدا کنید.
- ب) عبارتی برای تغییرات دمای میانگین آب $T_m(x)$ در لوله بدست آورید.
- ج) عبارتی برای تغییرات دمای سطح میله $T_s(x)$ در طول میله بدست آورید. عبارتی برای محل x بدست آورید که در آن دمای مزبور به بیشترین مقدار خود می رسد.

شار ثابت در سطح(Constant Surface Heat Flux)

اکنون حالتی را بررسی می کنیم که شار حرارتی که بر سطح می تابد،ثابت باشد. در این حالت $q_{conv}=q''_s(P.L)$

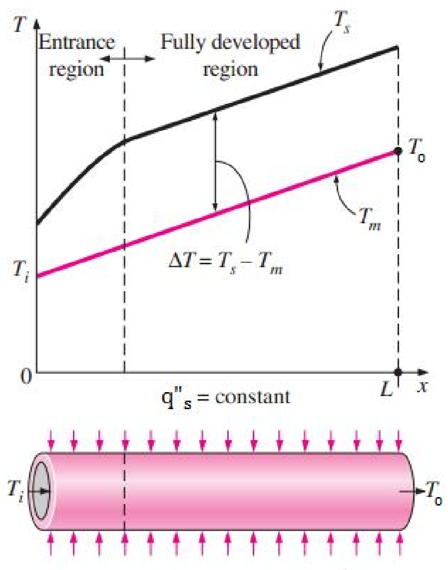
چون q''_s مستقل از x است:

$$\frac{dT_m}{dx}=\frac{q''_sP}{\dot{m}C_P}\neq f(x)$$

$$dT_m=\frac{q''_sP}{\dot{m}C_P}dx\Rightarrow\int_{T_{mi}}^{T_m}dT_m=\int_0^x\frac{q''_sP}{\dot{m}C_P}dx=\frac{q''_sP}{\dot{m}C_P}\int_0^x dx$$

با انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$\boxed{T_m(x)=T_{mi}+\frac{q''_sP}{\dot{m}C_P}x}$$



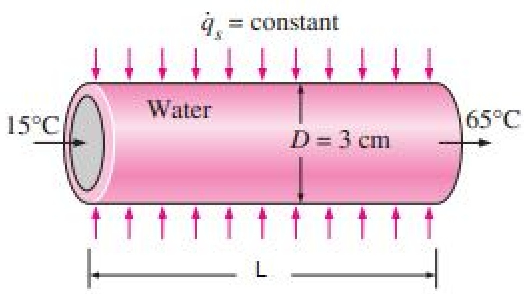
یعنی در حالت شار ثابت دمای میانگین بطور خطی با x در امتداد لوله تغییر می کند.

همچنین $T_s - T_m$ با x تغییر می کند بدلیل مقدار زیاد h در ورودی، این اختلاف کوچک است ولی با افزایش x و در نتیجه کاهش h که ناشی از رشد لایه مرزی است، افزایش می یابد.

تمرین

شار حرارتی ثابت 10000 وات بر متر مربع بر لوله حامل آبی به قطر 3 سانتیمتر می تابد.آب با نرخ 0.05 کیلوگرم بر ثانیه و با دمای 15 درجه سانتیگراد وارد لوله می شود.

- الف) طول لوله لازم برای اینکه دمای خروجی آب به 65 درجه سانتیگراد برسد چقدر است؟
- ب) اگر طول لوله5 متر باشد دمای خروجی آب چقدر است؟



دمای ثابت در سطح(Constant Surface Temperature)

اگر بجای شار حرارتی ثابت شرایط دمای ثابت در سطح برقرار باشد، برای تحلیل مساله ابتدا تعریف می کنیم:

$$\Delta T = T_s - T_m$$

چون $\frac{dT_s}{dx}$ برابر صفر خواهد بود و $\frac{dT_m}{dx} = \frac{q''_s P}{\dot{m} C_p}$ و $q''_s = h\Delta T$

در نتیجه:

$$\frac{d(\Delta T)}{dx} = -\frac{dT_m}{dx} = -\frac{P}{\dot{m} C_p} h\Delta T$$

با مرتب کردن و انتگرال گیری از دو طرف خواهیم داشت:

$$\frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = -\frac{P}{\dot{m} C_p} h dx$$

$$\int_{\Delta T_i}^{\Delta T_0} \frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = -\frac{P}{\dot{m} C_p} \int_0^L h dx$$

$$\ln\frac{\Delta T_0}{\Delta T_i}=-\frac{PL}{\dot{m}C_P}\left(\frac{1}{L}\int_0^L h dx\right)$$

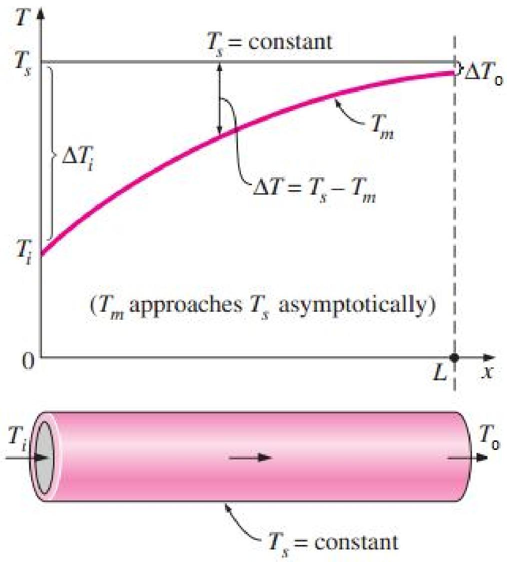
$$\ln\frac{\Delta T_0}{\Delta T_i}=-\frac{PL}{\dot{m}C_P}\ \bar{h}$$

$$\frac{\Delta T_0}{\Delta T_i}=\frac{T_s-T_{m0}}{T_s-T_{mi}}=\exp\left(-\frac{PL}{\dot{m}C_P}\bar{h}\right)$$

و یا در حالت کلی:

$$\boxed{\frac{T_s-T_m(x)}{T_s-T_{mi}}=\exp(-\frac{Px}{\dot{m}C_P}\bar{h})}$$

از رابطه فوق می توان دریافت که اختلاف دمای T_s-T_m بطور نمایی با فاصله در امتداد محور لوله کم می شود.



$$q_{conv}=\dot{m}C_P[(T_s-T_{mi})-(T_s-T_{m0})]=\dot{m}C_P(\Delta T_i-\Delta T_0)$$

با جایگذاری $\dot{m}C_P$ از رابطه $\ln\frac{\Delta T_0}{\Delta T_i}=-\frac{PL}{\dot{m}C_P}\ \bar{h}$ داریم:

$$\boxed{q_{conv}=\bar{h}A_s\ \Delta T_{lm}}$$

که در آن $A_s=PL$ و

$$\boxed{\Delta T_{lm}=\frac{\Delta T_0-\Delta T_i}{\ln(\Delta T_0/\Delta T_i)}}$$

ΔT_{lm} اختلاف دمای متوسط لگاریتمی نام دارد.در اغلب کاربردها بجای دمای سطح لوله، دمای یک سیال خارجی معلوم است. می توان نشان داد اگر T_s را با T_∞ و $\bar{h}$ را با $\bar{U}$ (ضریب انتقال حرارت کلی)تعویض کنیم نتایج این بخش همچنان معتبر خواهد بود. یعنی:

$$\frac{\Delta T_0}{\Delta T_i}=\frac{T_\infty-T_{m0}}{T_\infty-T_{mi}}=\exp\left(-\frac{PL}{\dot{m}C_P}\bar{U}\right)$$

$$q=\bar{U}A_s\Delta T_{lm}$$

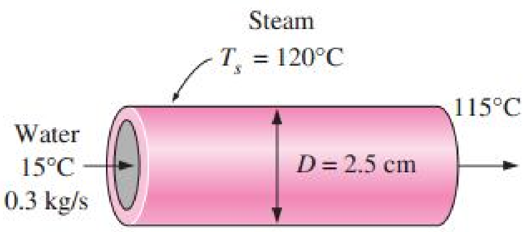
تمرین

روغن موتور با نرخ 0.02kg/s در لوله ای به قطر 3mm و طول 30m جریان دارد. دمای ورودی روغن 60°C است و دمای دیواره لوله توسط میعان بخار در سطح خارجی آن در 100°C نگه داشته می شود.

- الف) ضریب متوسط انتقال گرما را برای جریان داخلی روغن بدست آورید.
- ب) دمای خروجی روغن را محاسبه نمایید.

تمرین

آب با دمای15C و دبی جرمی0.3kg/s وارد لوله ای جدار نازک مسی به قطر2.5cm می شود و توسط چگالش بخاری به دمای120C که بیرون لوله قرار دارد گرم می شود.اگر ضریب انتقال حرارت متوسط $800 W/m^2C$ باشد،طول مورد نیاز لوله را برای اینکه دمای خروجی آب به 115C برسد،حساب کنید.



جریان آرام در لوله ها

ناحیه کاملاً توسعه یافته

در صورت ثابت بودن خواص، معادله انرژی عبارت است از:

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

در ناحیه توسعه یافته $v = 0$ و $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ و در حالت ثابت بودن شار گرما در سطح: $\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{dT_m}{dx}$

از طرفی داشتیم:

$$u=2u_m\left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]$$

بنابراین معادله انرژی بصورت زیر ساده می شود:

$$2u_m\left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]\frac{dT_m}{dx}=\frac{\alpha}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)$$

و یا

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=\frac{2u_m}{\alpha}\left(\frac{dT_m}{dx}\right)\left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]$$

که در آن $\frac{2u_m}{\alpha}\ \frac{dT_m}{dx}$ ثابت است. با جدا کردن متغیرها و دو بار انتگرال گیری، خواهیم داشت

$$T(r,x)=\frac{2u_m}{\alpha}\left(\frac{dT_m}{dx}\right)\left[\frac{r^2}{4}-\frac{r^4}{16r_0^2}\right]+C_1\ln r+C_2$$

چون در $r=0$ دما باید محدود باشد لذا $C_1=0$.

از طرفی $T(r_0)=T_s$ در نتیجه $C_2=T_s(x)-\frac{2u_m}{\alpha}\left(\frac{dT_m}{dx}\right)\left(\frac{3r_0^2}{16}\right)$ بنابراین:

$$T(r,x)=T_s(x)-\frac{2u_m r_0^2}{\alpha}\left(\frac{dT_m}{dx}\right)\left[\frac{3}{16}+\frac{1}{16}\left(\frac{r}{r_0}\right)^4-\frac{1}{4}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]$$

در حالت توسعه یافته و $q''_s=cte$ و جریان آرام:

$$T_m=\frac{2}{u_m r_0^2}\int_0^{r_0}uTr\,dr \quad \text{و} \quad \frac{u(r)}{u_m}=2\left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]$$

در نتیجه: $T_m(x)=T_s(x)-\frac{11}{48}\left(\frac{u_m r_0^2}{\alpha}\right)\left(\frac{dT_m}{dx}\right)$ اما $\frac{dT_m}{dx}=\frac{q''_sP}{\dot{m}C_P}$ بنابراین داریم: $T_m(x)-T_s(x)=-\frac{11}{48}\frac{q''_sD}{k}$

دقت داشته باشید: $\dot{m}=\rho u_m\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)$ و $P=\pi D$

با ترکیب قانون سرمایش نیوتن نتیجه می شود:

$$h=\frac{48}{11}\ \frac{k}{D}$$

و در نتیجه:

$$\boxed{Nu_D=\frac{hD}{k}=4.36}$$

بنابراین در یک لوله که با شار گرمای ثابت در سطح و شرایط کاملاً توسعه یافته و آرام مشخص می شود عدد نوسلت ثابت بوده و مستقل از Re_D و Pr و موقعیت محوری است.

در حالت دمای ثابت و برای شرایط آرام کاملاً توسعه یافته:

$$\frac{\partial^2T}{\partial x^2}\ll\frac{\partial^2T}{\partial r^2} \quad \text{و} \quad \frac{\partial T}{\partial x}=\frac{T_s-T}{T_s-T_m}\ \frac{dT_m}{dx}$$

معادله انرژی برابر خواهد بود:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=\frac{2u_m}{\alpha}\left(\frac{dT_m}{dx}\right)\left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]\frac{T_s-T}{T_s-T_m}$$

و در نتیجه:

$$\boxed{Nu_D=\frac{hD}{k}=3.66}$$

در این حالت هم عدد نوسلت ثابت بوده و مستقل از Re_D و Pr و موقعیت محوری است.

در هنگام استفاده از روابط فوق، خواص باید در دمای میانگین سیال ورودی و خروجی محاسبه شود.

تمرین

روغن با دمای 25°C و سرعت میانگین 10m/s تحت شرایط کاملاً توسعه یافته هیدرودینامیکی وارد قسمت گرم شده لوله ای به قطر 5mm و طول 6 متر می شود. اگر سطح قسمت گرم شده در دمای 150°C نگه داشته شود دمای خروجی روغن و نرخ کلی انتقال گرما را بدست آورید.

13

ناحیه ورودی(Entry Region)

بدلیل وابستگی سرعت و دما به x و r حل معادله انرژی در این ناحیه بسیار مشکل است با وجود این دو حل متفاوت برای طول ورودی بدست آمده است. یکی آنکه فرض شود پروفیل سرعت، کاملاً توسعه یافته باشد این وضعیت هنگامی وجود خواهد داشت که قبل از نقطه شروع انتقال گرما، طول ورودی آدیاباتیک وجود داشته باشد. برای سیالات با اعداد پرانتل زیاد مانند روغن ها این فرض، فرض قابل قبولی است. حل دیگر آنکه مسئله طول ورودی مرکب(گرما و سرعت) وقتی رخ می دهد که در آن پروفیل های دما و سرعت بطور همزمان رشد کنند.

برای شرایط دمای ثابت سطح رابطه کیز و هاوزن(Kays,Hausen) بکار می رود، خواص باید در دمای میانگین ارزیابی شود:

$$\boxed{\overline{Nu}_D = 3.66 + \frac{0.0668\left(\frac{D}{L}\right)Re_D Pr}{1+0.04\left[\left(\frac{D}{L}\right)Re_D Pr\right]^{\frac{2}{3}}}}$$

در حالت طول ورودی مرکب رابطه سیدر و تیت (Sider and Tate) پیشنهاد شده است، خواص باید در دمای میانگین ارزیابی شود.

$$\boxed{\overline{Nu}_D = 1.86\left(\frac{Re_D Pr}{\frac{L}{D}}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\mu}{\mu_s}\right)^{0.14}}$$

شرایط استفاده از این رابطه عبارتند از:

$$T_s = cte$$
$$0.48 < Pr < 16700$$
$$0.0044 < \frac{\mu}{\mu_s} < 9.75$$

همچنین عدد نوسلت در ناحیه ورودی برای حالتی که جریان آرام از بین دو صفحه موازی همدما به طولL عبور نماید توسط Edwards بدست آمده است:

$$\boxed{Nu = 7.54 + \frac{0.03\left(\frac{D_h}{L}\right)RePr}{1 + 0.016\left[\left(\frac{D_h}{L}\right)Re_D Pr\right]^{\frac{2}{3}}}}$$

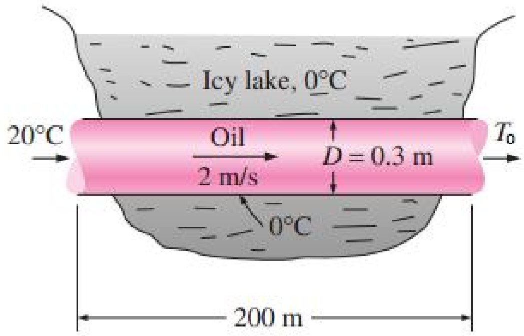
D_h قطر هیدرولیکی است که چهار برابر مساحت مقطع تقسیم بر محیط تر شده مجراست.

تمرین

روغن با سرعت میانگین2m/s و دمای20C وارد لوله ای به قطر30cm می شود.خط لوله روغن به طول200m از آب سرد دریاچه ای به دمای صفردرجه سانتیگراد عبور می کند.تعیین کنید:

- الف)دمای روغن را هنگامی که از لوله خارج می شود

- ب)نرخ انتقال حرارت از روغن
- ج)توان مورد نیاز برای غلبه بر افت فشار طوریکه روغن در لوله جریان داشته باشد.



جریان مغشوش در لوله ها

چون تجزیه و تحلیل شرایط جریان مغشوش پیچیده است لذا به روابط تجربی متوسل خواهیم شد.

برای جریان توسعه یافته،آشفته و سطح زبر روابط زیر صادق است:

$$\boxed{\frac{C_f}{2} = \frac{f}{8} = \mathrm{St}\,\mathrm{Pr}^{\frac{2}{3}} = \frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{RePr}}\mathrm{Pr}^{\frac{2}{3}}}$$

C_f ضریب اصطکاک فانینگ یا دارسی و f ضریب اصطکاک مودی می باشد.

رابطه دیتوس بولتر(Dittus – Boelter):

$$\boxed{\mathrm{Nu_D} = 0.023\mathrm{Re}_D^{\frac{4}{5}}\mathrm{Pr}^n}$$

شرایط استفاده از فرمول دیتوس بولتر:

$\frac{L}{D} \geq 10 \quad \mathrm{Re_D} \geq 10000 \quad 0.7 \leq \mathrm{Pr} \leq 160$ سطح صاف

برای فرایند سرمایشی یا Cooling $(T_s < T_m)$: n = 0.3 و برای فرایند گرمایشی یا Heating $(T_s > T_m)$: n = 0.4

تمام خواص در دمای میانگین ارزیابی می شود.

رابطه سیدر و تیت (Sieder and Tate):

$$\boxed{\mathrm{Nu_D} = 0.027\mathrm{Re}_D^{\frac{4}{5}}\mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\mu}{\mu_s}\right)^{0.14}}$$

این رابطه هنگامی که $0.7 \leq \mathrm{Pr} \leq 16700$ $\frac{L}{D} \geq 10$ و $\mathrm{Re_D} \geq 10000$ معتبر خواهد بود.کلیه خواص در دمای میانگین خوانده می شود بجز μ_s که در T_s ارزیابی می شود.

روابط فوق با تقریب خوبی در هر دو حالت شار گرمایی ثابت و دمای سطح ثابت بکار می روند.

روابط فوق ممکن است خطاهایی تا حدود 25% داشته باشند با استفاده از روابط جدید می توان این خطاها را تا کمتر از 15% نیز کاهش داد:

رابطه پتکوف، کریلوف و پوپوف(Petukhov, kirillov, Popov):

سطح صاف $\boxed{f = (1.82 \log Re_D - 1.64)^{-2}}$

$10^4 < Re < 5 \times 10^6$ و 0.5 < Pr < 2000 $\boxed{Nu_D = \frac{\left(\frac{f}{8}\right)Re_D Pr}{1.07+12.7\left(\frac{f}{8}\right)^{\frac{1}{2}}\left(Pr^{\frac{2}{3}}-1\right)}}$

رابطه گنیلینسکی(Gnielinski) بصورت زیر است:

سطح صاف $\boxed{f = (0.79 \ln Re_D - 1.64)^{-2}}$

$2300 < Re < 5 \times 10^6$ و 0.5 < Pr < 2000 $\boxed{Nu_D = \frac{\left(\frac{f}{8}\right)(Re-1000)Pr}{1+12.7\left(\frac{f}{8}\right)^{\frac{1}{2}}\left(Pr^{\frac{2}{3}}-1\right)}}$

خواص در روابط فوق در $\bar{T}_m$ (دمای میانگین) خوانده می شوند و در هر دو حالت شار ثابت و دمای ثابت سطح کاربرد دارند.

در حالتی که سطح زبر باشد می توان ضریب اصطکاک را از نمودار مودی یا رابطه زیر بدست آورد و در رابطه نوسلت مربوط به گنیلینسکی قرار داد:

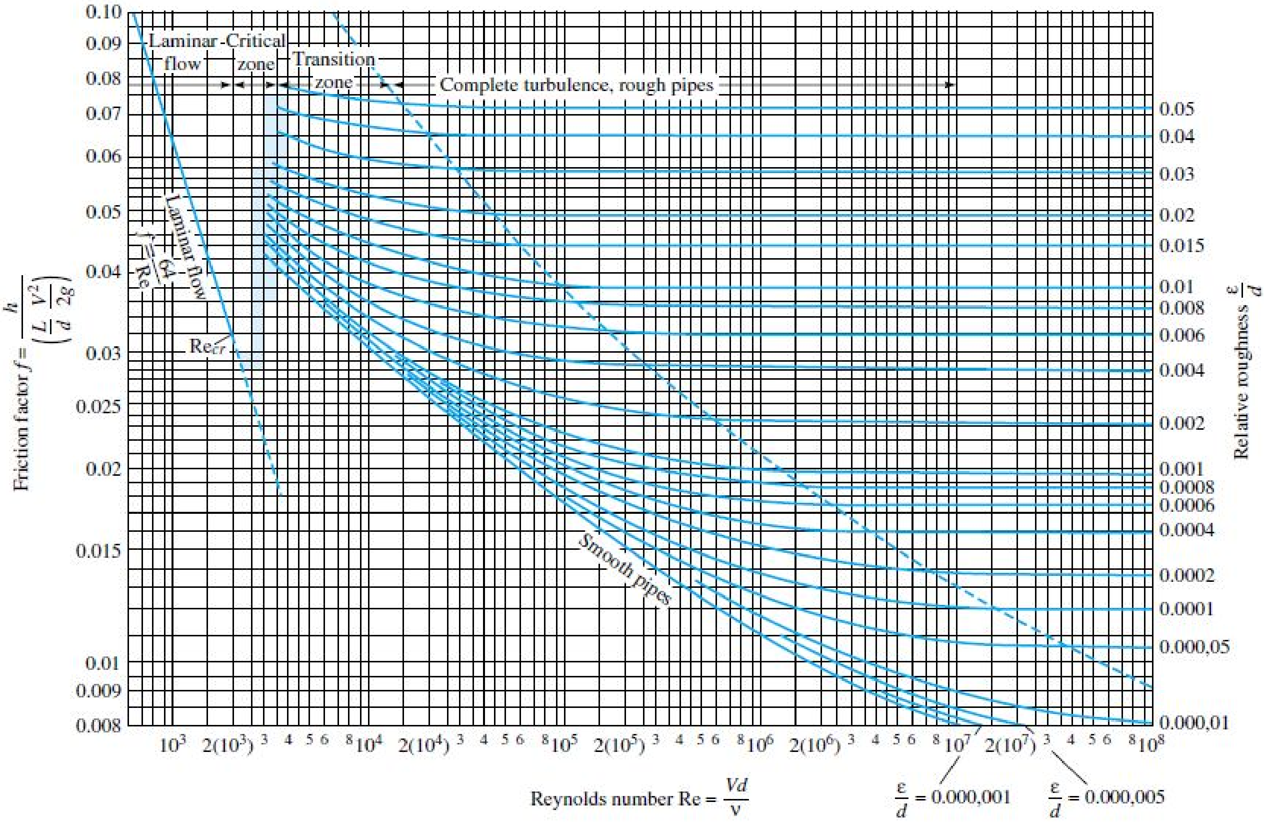
$$\boxed{f = [-1.8 \log(\frac{6.9}{Re} + (\frac{\varepsilon}{3.76D})^{1.11})]^{-2}}$$

که در آن ε زبری لوله بوده که بستگی به جنس آن از جدول زیر بدست می آید:

Equivalent roughness values for new commercial pipes

Material	Roughness, ε ft	Roughness, ε mm
Glass, plastic	0 (smooth)	
Concrete	0.003–0.03	0.9–9
Wood stave	0.0016	0.5
Rubber, smoothed	0.000033	0.01
Copper or brass tubing	0.000005	0.0015
Cast iron	0.00085	0.26
Galvanized iron	0.0005	0.15
Wrought iron	0.00015	0.046
Stainless steel	0.000007	0.002
Commercial steel	0.00015	0.045

جدول فوق در مجموعه جداول و نمودارهای مربوط به این درس در کتابخانه وبلاگ وجود ندارد.



چون طول ورودی برای جریان مغشوش کوتاه است لذا فرض اینکه عدد نوسلت متوسط برای کل لوله با عدد نوسلت در ناحیه کاملاً توسعه یافته برابر است $\overline{Nu}_D \approx Nu_{D,fd}$ فرض معقولی بشمار می آید ولی در لوله های کوتاه $\overline{Nu}_D$ بیش از $Nu_{D,fd}$ خواهد بود و می توان رابطه زیر را بکار برد:

$$\boxed{\frac{N\bar{u}_D}{Nu_{D,fd}} = 1 + \frac{C}{\left(\frac{x}{D}\right)^m}}$$

m و C به نوع مقطع ورودی (مثلاً لبه تیز یا نازل) ناحیه ورودی (گرمایی یا مرکب) و همچنین به اعداد پرانتل و رینولدز بستگی دارد. تمامی خواص باید در دمای میانگین محاسبه شوند.

برای جریان مغشوش کاملاً توسعه یافته در لوله های صاف با شار گرمای ثابت می توان از رابطه اسکوپینسکی (Skupinski) استفاده کرد:

$$\boxed{Nu_D = 4.82 + 0.0185 Pe_D^{0.827}} \qquad 3.6 \times 10^3 < Re_D < 9.05 \times 10^5 \qquad 10^2 < Pe < 10^4$$

و برای دمای ثابت سطح، سیبن و شیمازاکی(Seban - Shimazaki) رابطه زیر را برای $Pe > 100$ پیشنهاد کرده اند:

$$\boxed{Nu_D = 5 + 0.025 Pe_D^{0.8}}$$

که $Pe = Re_D Pr$ عدد پکله نام دارد.

برای سیالاتی که پرانتل بسیار کوچکی دارند (مایعات فلزی) نمی توان از روابط فوق استفاده کرد. روابط مناسب برای این گونه سیالات بترتیب برای حالات دمای ثابت و شار ثابت (هر دو برای سطح صاف)بصورت زیر است(Pr<0.01):

$$\boxed{\begin{aligned} Nu_D &= 4.8 + 0.0156Re^{0.85}Pr^{0.93} \\ Nu_D &= 6.3 + 0.0167Re^{0.85}Pr^{0.93} \end{aligned}}$$

تمرین

آب با نرخ 2kg/s در لوله ای به قطر 40mm جریان دارد. با ثابت نگه داشتن دمای سطح لوله در 100°C دمای آب از 25°C به 75°C رسانده می شود. طول مورد نیاز لوله را بدست آورید.

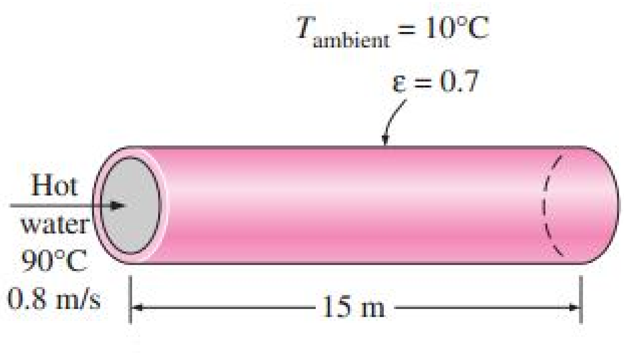
تمرین

یک لوله فولادی جدار ضخیم با ضریب هدایت $60\,\frac{W}{m.K}$ حاوی آب گرم توسط جریان هوای عمود بر آن با سرعت $20\,\frac{m}{s}$ و دمای 25°C سرد می شود. قطر داخلی لوله $D_i = 20mm$ و قطر خارجی آن $D_0 = 25mm$ است. در یک نقطه مشخص در امتداد لوله، دمای میانگین آب 80°C است. اگر جریان داخل لوله کاملاً توسعه یافته با عدد رینولدز 20000 باشد، نرخ انتقال گرما به جریان هوا بر واحد طول لوله چقدر است؟

تمرین

آب داغ در دمای90C و با سرعت 0.8m/s وارد یک لوله15متری چدنی(k=52W/mC)می شود.قطر داخلی و خارجی آن بترتیب4cm و4.6cm است.ضریب صدور سطح خارجی لوله0.7 است که در معرض هوای سرد محیط به دمای10Cوضریب جابجایی$15W/m^2C$ قرار دارد.فرض کنید دمای دیواره های محیط اطراف در 10C ثابت نگه داشته شده باشند،تعیین کنید:

- الف)نرخ حرارت تلف شده از آب
- ب)دمای خروجی آب.



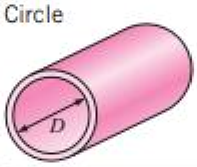
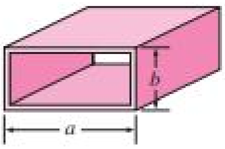
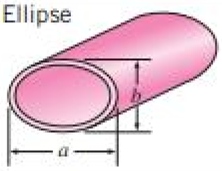
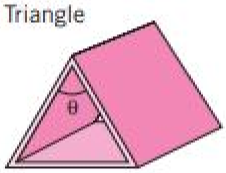
مجراهای غیردایره ای(Noncircular Tubes)

اغلب نتایج لوله های دایره ای را می توان با استفاده از قطر مؤثر (Effective Diameter)بعنوان طول مشخصه روی مقاطع غیردایره ای اعمال نمود. این قطر بنام قطر هیدرولیکی(Hydraulic Diameter) معروف است و بصورت زیر تعریف می شود:

$$\boxed{D_h = \frac{4A_c}{P}}$$

A_c مساحت سطح مقطع جریان و P محیط تر شده است از این قطر در محاسبه پارامترهایی نظیر Re_D و Nu_D استفاده می شود. برای جریان مغشوش استفاده از روابط بخش جریان مغشوش برای لوله های دایره ای معقول بنظر می رسد. ولی برای جریان آرام استفاده از روابط لوله دایره ای دقت کمتری دارد بویژه اگر سطح مقطع دارای گوشه های تیزی باشد. در این حالت عدد نوسلت در شرایط کاملاً توسعه یافته را می توان از جدول بدست آورد که این نتایج برای شرایط گرمایی سطح (شار گرمایی ثابت یا دمای ثابت سطح) باهم فرق می کنند.

Nusselt number and friction factor for fully developed laminar flow in tubes of various cross sections ($D_h = 4A_c/p$, $Re = \mathcal{V}_m D_h/\nu$, and $Nu = hD_h/k$)

Tube Geometry	a/b or $\theta°$	Nusselt Number T_s = Const.	Nusselt Number $\dot{q}_s$ = Const.	Friction Factor f
Circle 	—	3.66	4.36	64.00/Re
Rectangle 	a/b			
	1	2.98	3.61	56.92/Re
	2	3.39	4.12	62.20/Re
	3	3.96	4.79	68.36/Re
	4	4.44	5.33	72.92/Re
	6	5.14	6.05	78.80/Re
	8	5.60	6.49	82.32/Re
	∞	7.54	8.24	96.00/Re
Ellipse 	a/b			
	1	3.66	4.36	64.00/Re
	2	3.74	4.56	67.28/Re
	4	3.79	4.88	72.96/Re
	8	3.72	5.09	76.60/Re
	16	3.65	5.18	78.16/Re
Triangle 	θ			
	10°	1.61	2.45	50.80/Re
	30°	2.26	2.91	52.28/Re
	60°	2.47	3.11	53.32/Re
	90°	2.34	2.98	52.60/Re
	120°	2.00	2.68	50.96/Re

این جدول به این صورت در مجموعه جداول و نمودارهای موجود در کتابخانه وبلاگ قرار ندارد و در آن مجموعه تنها اطلاعات مربوط به برخی مجراها موجود است.

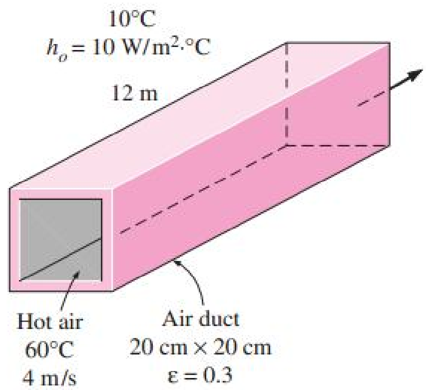
تمرین

هوا با دمای $27°C$ و نرخ جریان $3 \times 10^{-4} \frac{kg}{s}$ وارد مجرایی به طول $1m$ و سطح مقطع مستطیلی به طول و عرض $16mm$ و $4mm$ می شود. شار گرمای یکنواخت $600 \frac{W}{m^2}$ روی سطح مجرا وجود دارد. دمای هوا و دمای سطح مجرا را در مقطع خروجی پیدا کنید.

تمرین

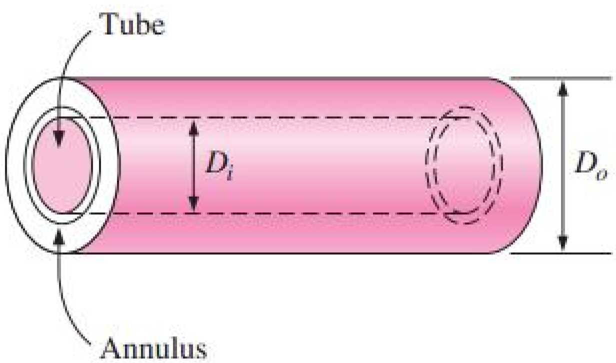
هوای داغ در دمای $60C$ از تنور یک خانه خارج شده و با سرعت $4m/s$ وارد مجرای با سطح مقطع مستطیلی به طول $12m$ و ابعاد $20cm$ در $20cm$ می شود.مقاومت گرمایی مجرا ناچیز بوده و ضریب صدور سطح خارجی آن 0.3 است که در معرض هوای سرد زیرزمین به دمای $10C$ و ضریب جابجایی $10W/m^2C$ واقع است.فرض کنید دمای دیواره های زیرزمین $10C$ باشد، تعیین کنید:

- الف)دمای هوای گرم مجرا را هنگامی که از زیرزمین خارج می شود
- ب)نرخ اتلاف حرارت از هوای داغ مجرا به زیرزمین.



مجرای بین لوله های هم محور(Flow through Tube Annulus)

در این حالت سیال در فضای حلقوی بین لوله های هم محور جریان داشته و انتقال گرمای جابجایی به یا از سطح داخلی و خارجی لوله صورت می گیرد.



شار گرما از سطح توسط عبارت هایی به شکل زیر محاسبه می شود:

$q''_0 = h_0(T_{s0} - T_m) \qquad q''_i = h_i(T_{si} - T_m)$

اعداد نوسلت داخلی و خارجی که برای بدست آوردن ضرایب انتقال حرارت جابجایی بکار می روند،بصورت زیر تعریف می شوند:

$Nu_0 = \frac{h_0 D_h}{k} \qquad Nu_i = \frac{h_i D_h}{k}$

قطر هیدرولیکی در این حالت برابر است با:

$$D_h = \frac{4(\pi/4)(D_0^2 - D_i^2)}{\pi D_0 + \pi D_i} = D_0 - D_i$$

در حالت دمای ثابت در یک سطح و سطح تماس عایق شده دیگر و جریان آرام کاملاً توسعه یافته می توان Nu_i یا Nu_0 را از جدول بدست آورد که تابعی از $\frac{D_i}{D_0}$ خواهد بود.

D_i/D_o	Nu_i	Nu_o
0	—	3.66
0.05	17.46	4.06
0.10	11.56	4.11
0.25	7.37	4.23
0.50	5.74	4.43
1.00	4.86	4.86

اگر شار گرمای یکنواخت روی هر دو سطح وجود داشته باشد و جریان آرام باشد،اعداد نوسلت از عبارت های زیر محاسبه خواهند شد:

$Nu_i = \frac{Nu_{ii}}{1 - \left(\frac{q''_0}{q''_i}\right)\theta_i^*} \qquad Nu_0 = \frac{Nu_{00}}{1 - \left(\frac{q''_i}{q''_0}\right)\theta_0^*}$

می توان ضرائب Nu_{ii}، Nu_{00}، θ_i^* و θ_0^* را که تابعی از $\frac{D_i}{D_0}$ می باشند از جدول بدست آورد که این جدول همچون جدول فوق در مجموعه جداول و نمودارهای مهم انتقال حرارت موجود در وبلاگ قرار دارد.

اگر گرما به سیال منتقل شود q''_i و q''_0 مثبت و در غیر اینصورت منفی خواهند بود.

برای جریان مغشوش کاملاً توسعه یافته ضرائب تأثیر (Nu_{ii}، Nu_{00} و ...) تابعی از اعداد رینولدز و پرانتل اند ولی می توان در تقریب اول h_i و h_0 را مساوی فرض کرده و با استفاده از قطر هیدرولیکی، همراه با معادله دیتوس بولتر آنها را بدست آورد.

تمرین

مجرایی حلقوی بین دو لوله هم محور با قطر داخلی 25mm و قطر خارجی 50mm مفروض است. آب با نرخ جریان $0.4\frac{kg}{s}$ و دمای 25°C وارد مجرا می شود. اگر سطح داخلی لوله با عبور جریان الکتریسیته با نرخ $\dot{q} = 4000\frac{W}{m}$ (بر واحد طول) گرم شود و

سطح خارجی آن عایقبندی شده باشد طول لوله را برای اینکه دمای خروجی آب به $85°C$ برسد حساب کنید. دمای سطح داخلی لوله در مقطع خروجی چقدر است؟ شرایط را کاملاً توسعه یافته فرض کنید.

پایان