منبع درس:

۱- ارتعاشات مکانیکی تامسون　　　　**۲- ارتعاشات مکانیکی رائو**

نحوه ارزیابی:

حضور در کلاس

تمرین >>>> ۳ نمره

میان ترم >>>> ۵ نمره

پایان ترم >>>> ۱۲ نمره

پروژه >>>> اضافه

جلسه: اول

تعاریف:

حرکت نوسانی»»»

دسته مهم و خاصی از مسائل دینامیک با حرکت خطی و زاویه ای اجسام سروکار دارند و در حرکت آن ها انرژی جنبشی به پتانسیل و برعکس تبدیل می شود.

نتیجه تبدیل این انرژی ها به یک دیگر در حین حرکت اجسام حرکت نوسانی است.

همه ی اجسامی که دارای جرم و الاستیسیته می باشند می توانند حرکت نوسانی داشته باشند.

الاستیسیته = فنر　　　　**جرم = اینرسی ماده**

سیستم های خطی»»»

یک سیستم در صورتی خطی است که اصل بر هم نهی (سوپر پوزیشین) در آن قابل اعمال باشد.

اصل بر هم نهی»»»

این اصل بیان می کند که پاسخ بدست آمده از اعمال هم زمان دو تابع نیروی متفاوت برابر مجموعه هر کدام از پاسخ هاست.

سیستم غیر خطی»»»

اگر در یک سیستم اصل بر هم نهی استوار نباشد آن سیستم غیر خطی خوانده می شود.

در نتیجه در یک سیستم غیر خطی پاسخ به دو ورودی را نمی توان با محاسبه ی پاسخ هرکدام از ورودی ها و در نهایت جمع پاسخ ها بدست آورد.

خطی سازی سیستم های غیر خطی»»»

در سیستم های نوسانی ارتعاشات ممکن است حول نقطه ی تعادل سیستم انجام شود. در این صورت می توان از طریق اعمال بسط تیلور حول نقطه ی تعادل و حذف جملات درجه بالاتر و در نظر گرفتن جمله ی خطی ، این سیستم ها را خطی کرد.

ارتعاشات آزاد و ارتعاشات اجباری»»»

ارتعاشات آزاد هنگامی رخ می دهد که یک سیستم در اثر نیروهای داخلی و ذاتی خود در حرکت نوسانی باشد و نیروهای تحریک کننده خارجی بر سیستم اثر نکند.

ارتعاشاتی که در اثر تحریک نیروهای خارجی به وجود می آید ارتعاشات اجباری خوانده می شود.

تشدید»»»

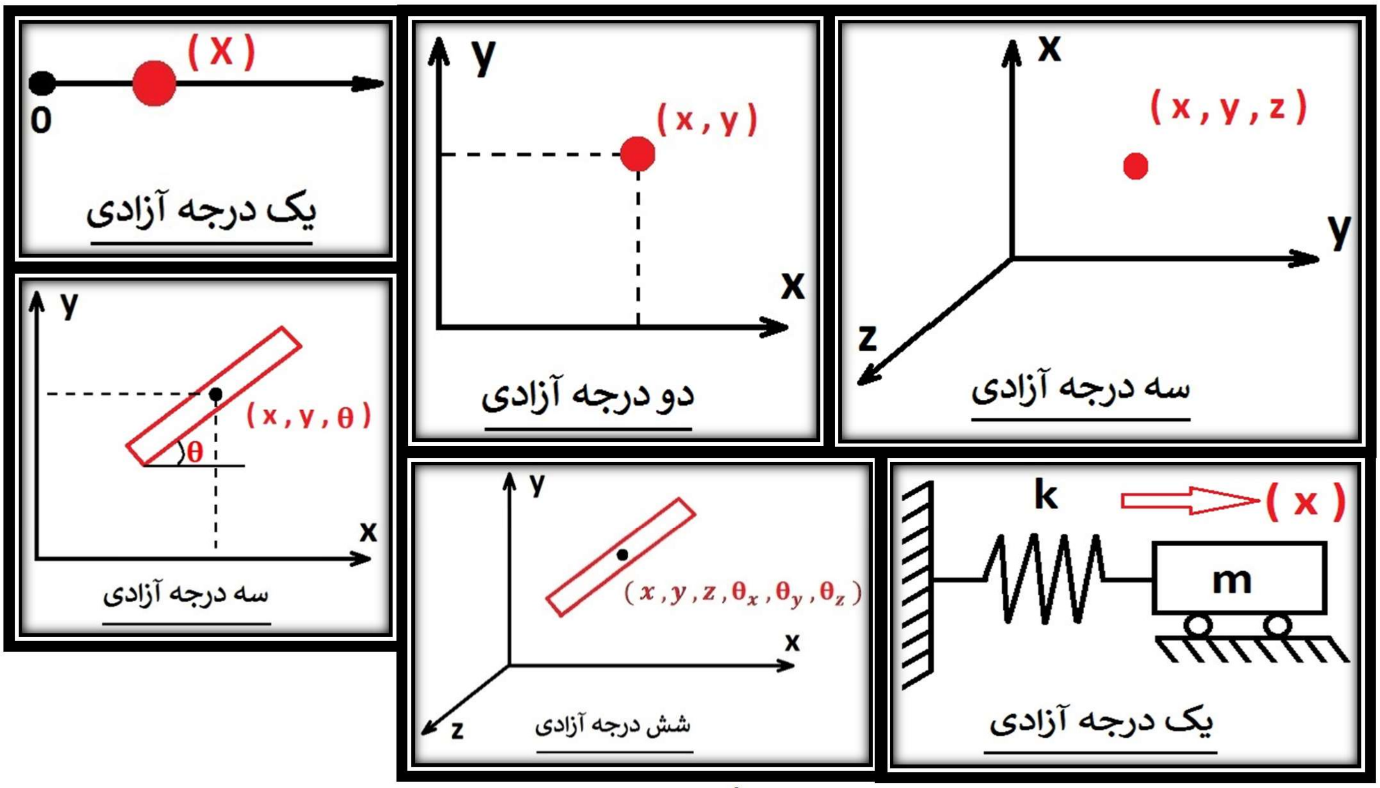
هنگامی که تحریک اعمال شده بر روی یک سیستم ارتعاشی نوسانی باشد سیستم خطی با همان فرکانس تحریک حرکت نوسانی خواهد نمود. اگر فرکانس تحریک با یکی از فرکانس های طبیعی سیستم منطبق باشد تشدید به وجود می آید و ممکن است منجربه نوسانات بسیار بزرگی شوند.

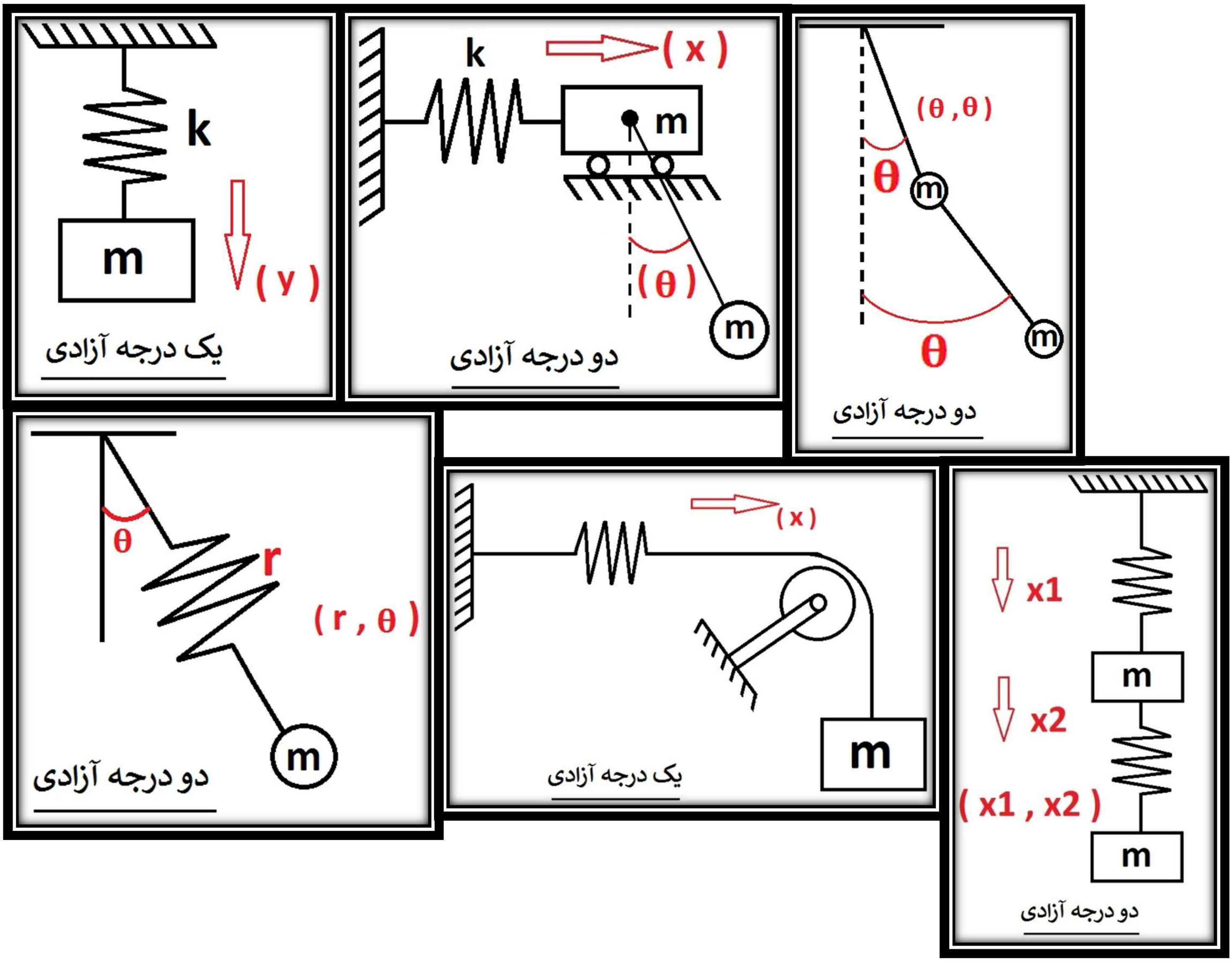
میرایی»»»

سیستم های ارتعاشی تا اندازه ای دارای میرایی می باشند. اگر میرایی کوچک باشد تأثیر بسیار کمی بر فرکانس های طبیعی سیستم خواهد داشت و محاسبات برپایه ی عدم وجود میرایی انجام می شود.

درجه آزادی»»»

تعداد مختصات مستقلی که برای توصیف حرکت یک سیستم مورد نیاز است درجه ی آزادی آن سیستم خوانده می شود.





ارتعاشات معین و ارتعاشات تصادفی»»»

اگر میزان نیروی محرکه ی مؤثر بر یک سیستم نوسانی در هر لحظه از زمان معلوم باشد آن را ارتعاشات معین (نظم) می گویند و اگر بر حسب زمان مشخص نباشد آن را تصادفی می نامند.

اجزاء یک سیستم نوسانی»»»

1 – ذخیره کننده ی انرژی پتانسیل (فنر یا یک جسم الاستیک)

2 – ذخیره کننده ی انرژی جنبشی (جرم یا اینرسی)

3 – مستهلک کننده انرژی سیستم (دمپر)

جلسه: دوم تاریخ: ۱۳۹۷/۱۲/۱۳

حرکت هارمونیک : (حرکت نوسانی)

هر حرکتی که در بازه های زمانی مشخص تکرار شود را حرکت هارمونیک یا نوسانی می گویند.

زمان تکرار τ زمان تناوب خوانده می شود و فرکانس یک نوسان به صورت زیر تعریف می شود؛

$$\xRightarrow{\text{فرکانس}} F=\frac{1}{\tau}$$

مثال:

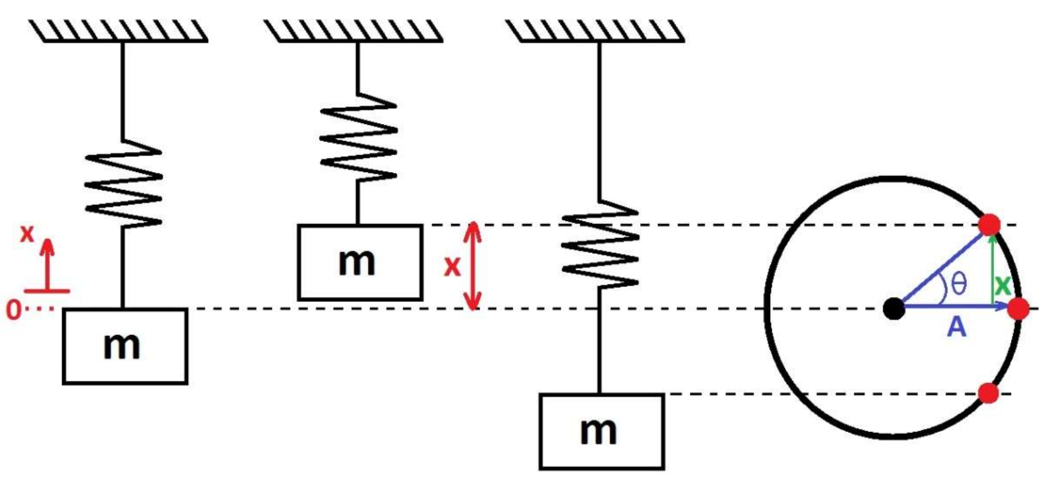
$$\tau = 0.002 \quad \text{«««««««««««««} \quad F=\frac{1}{0.002}=500$$

اگر $x(t)$ تابعی با دوره تناوب τ باشد در این صورت داریم $x(t)=x(t+\tau)$

یعنی:

ساده ترین شکل حرکت تناوبی حرکت هارمونیک می باشد که به صورت تابع $\sin$ و یا $\cos$ مثلثاتی می باشد.

این حرکت را می تون با یک جرم آویزان شده از یک فنر سبک نشان داد.



$$\begin{matrix}\tau & 2\pi \\ t & \theta\end{matrix} \ggg \quad \theta = \frac{2\pi}{\tau}\, t \quad \overset{F=\frac{1}{\tau}}{\Longrightarrow} \theta = (2\pi F)t$$

$$\xrightarrow{\text{فرکانس طبیعی سیستم}} \underbrace{\omega}_{\text{امگا}} = 2\,\pi\, F \quad \ggg\ggg \quad \theta = \omega\, t$$

$$\text{موقعیت هر لحظه} \begin{cases} x(t) = A\, sin\, \theta \\ x(t) = A\, sin\, \omega\, t \end{cases}$$

در معادله $\{x(t) = A\, sin\, \omega\, t\}$ ، A دامنه نوسان نسبت به نقطه تعادل و τ زمان تناوب نوسان می باشد و کمیت ω که فرکانس دورانی خوانده می شود بر حسب رادیان بر ثانیه می باشد. سرعت و شتاب حرکت هارمونیک را می توان به صورت ساده از مشتق گیری از معادله بالا بدست آورد.

$$x(t) = A\, sin\, \omega\, t$$

$$\xrightarrow{\text{یک بار مشتق نسبت به زمان}} \dot{x}(t) = A\, \omega\, cos\, \omega t$$

$$\xrightarrow{\text{دو بار مشتق نسبت به زمان}} \ddot{x}(t) = -\, A\, \omega^2\, sin\, \omega t$$

انرژی جنبشی:

انرژی جنبشی یک ذره به صورت زیر تعریف می شود.

$$T = \frac{1}{2} m\, V^2$$

و برابر کل کاریست که باید بر روی ذره انجام شود تا سرعت آن از صفر تا V برسد.

انرژی جنبشی کمیتی اسکالر و همواره مثبت است و می توان رابطه کار و ارژی را به صورت زیر نوشت؛

$$\Delta u = \Delta T \qquad \ggg \qquad u_{1-2} = T_2 - T_1 \qquad \ggg \qquad \underbrace{\frac{1}{2} m \left(V_2^2 - V_1^2\right)}$$

معادله $T = \frac{1}{2} m V^2$ برای انرژی جنبشی یک ذره می باشد اما برای انرژی جنبشی یک جسم صلب داریم:

$$T = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega^2$$

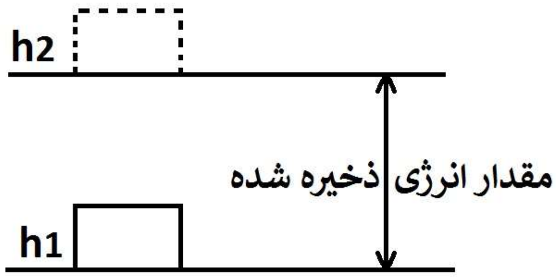
ω = سرعت زاویه ای $\bar{I}$ = ممان اینرسی حول مرکز جرم

انرژی پتانسیل
- گرانشی (جاذبه)
- فنری (کشسانی)

گرانشی:

$$\xrightarrow{\text{فرمول}} vg = m\,g\,h$$

$$\xrightarrow{\text{اختلاف}} \Delta vg = m\,g\,(h_2 - h_1)$$

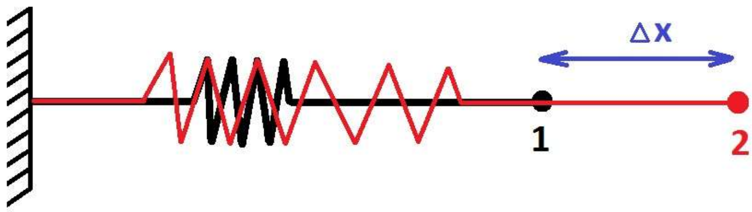


کشسانی:

$$\xrightarrow{\text{فرمول}} ve = \frac{1}{2} k\,x^2$$

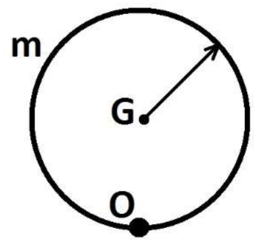
k = ضریب سختی فنر x = میزان جمع شدگی یا کشیدگی فنر

$$\xrightarrow{\text{اختلاف}} \Delta ve = \frac{1}{2} k \left(x_2^2 - x_1^2\right)$$



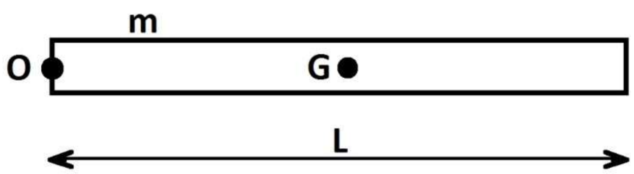
ممان اینرسی:

کره یا دایره:



$$I_G = \frac{1}{2}\, m\, r^2$$
$$I_O = \frac{3}{2}\, m\, r^2$$

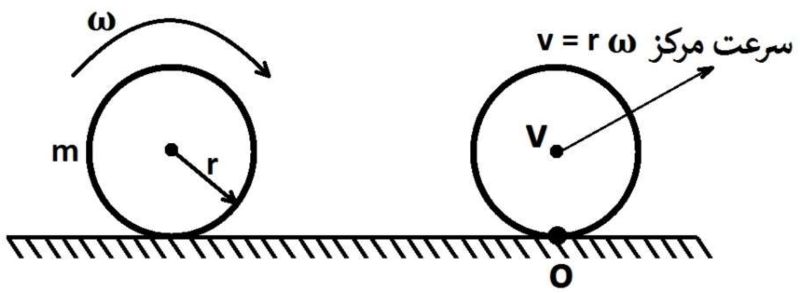
میله:



$$= \frac{1}{12}\, m\, L^2$$
$$= \frac{1}{3}\, m\, L^2$$

مثال:

انرژی جنبشی استوانه ی تو پر یکنواخت به جرم m که حرکت غلطشی انجام می دهد را بدست آورید؟



نکته:

چون که دوران دارد از فرمول

جسم صلب استفاده می کنیم.

$$T = \frac{1}{2} m\, V^2 + \frac{1}{2}\, \bar{I}_o\, \omega^2$$

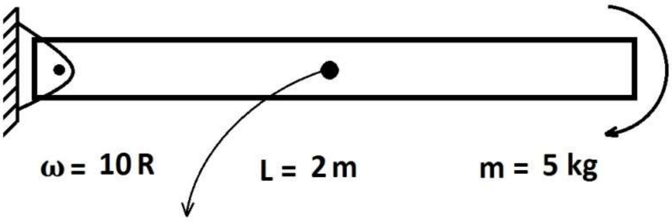
$$T = \frac{1}{2} m\,(r\,\omega)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\,m\,r^2\right)\,\omega^2$$

$$T = \frac{1}{2} m\,r^2\omega^2 + \frac{3}{4}\,m\,r^2\,\omega^2 = \frac{5}{4} m\,r^2\omega^2$$

مثال:

انرژی جنبشی برای سیستم های زیر را بدست آورید؟

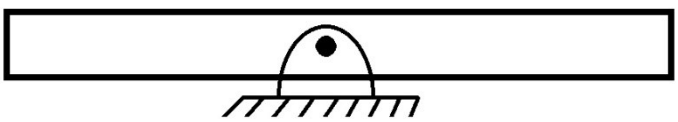
الف)



$$v = \frac{L}{2} \times \omega \Rightarrow v = \frac{2}{2} \times 2 \Rightarrow 1 \times 2 = 2$$

$$T = \frac{1}{2} \times 2 \times\ 2^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\ \times 2 \times 2^2\right) \times 2^2 = 9.33$$

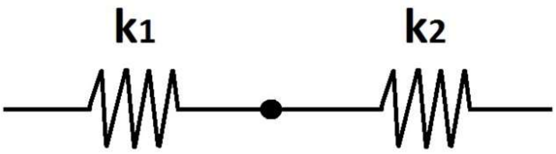
ب)



$$T = \underbrace{\cancel{\frac{1}{2} m\,V^2}} + \frac{1}{2}\ \bar{I}\,\omega^2$$

صفر ≫ چون هول مرکز دوران دارد

سختی فنرها:



فنر های سری

keq = **برای فنر معادل با مجموعه فنرها است.**

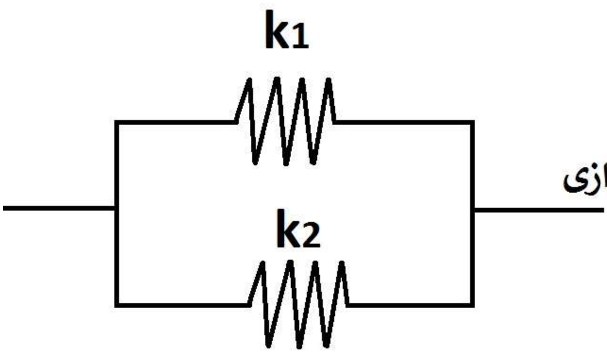
$$\frac{1}{keq} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_1}$$

مثال:

$$k_1 = 80 \qquad k_2 = 100$$

$$\frac{1}{keq} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_1}$$

$$\frac{1}{keq} = \frac{1}{80} + \frac{1}{100} \ggg \frac{1}{keq} = \frac{100+80}{80 \times 100} \ggg keq = \frac{80 \times 100}{100+80} = 44.44$$



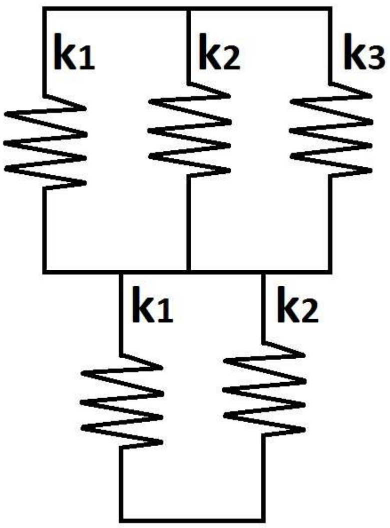
فنر های موازی

$$keq = k_1 + k_2$$

مثال: $k_1 = 80 \qquad k_2 = 100$

$$keq = 80 + 100 = 180$$

مثال:



3k

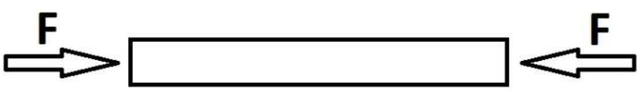
$$\frac{1}{keq} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{3k} = \frac{3k+2k}{6k^2}$$

$$keq = \frac{6\cancel{k}^2}{5\cancel{k}} = \frac{6}{5}k$$

2k

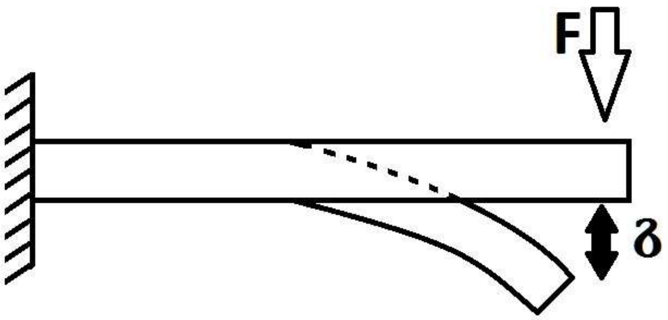
تیری که به صورت محوری تحت فشار است؛

تیر آزاد:



$$\left.\begin{array}{r} \partial = \dfrac{F\,L}{A\,E} \\ F = k\,x \ggg\ggg keq\left(\dfrac{F\,L}{A\,E}\right) \end{array}\right\} \underbrace{keq = \frac{E\,A}{L}}$$

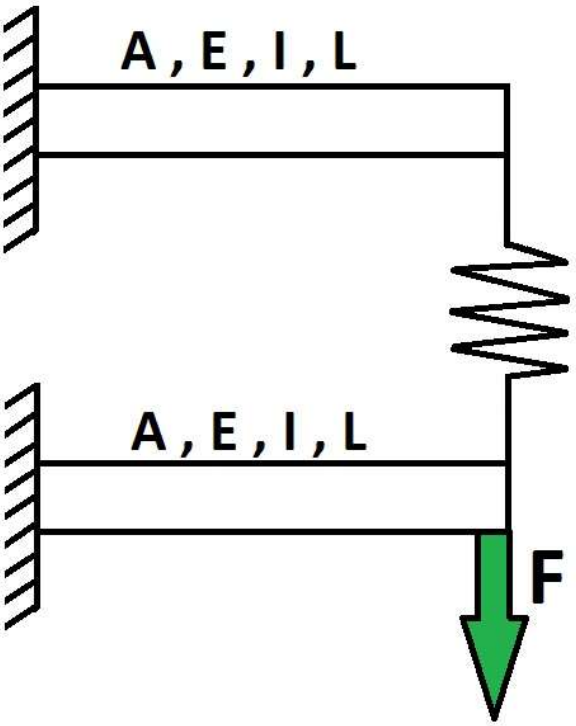
تیر یک سر گیر دار:



$$\underbrace{keq = \frac{3\,E\,I}{L^3}}$$

تمرین:

فنریت معادل سیستم شکل زیر را تعیین کنید؟



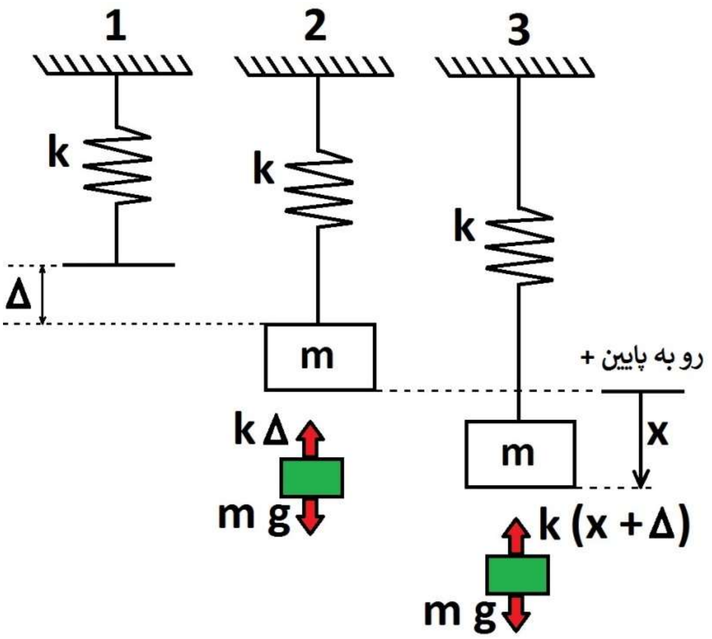
$^{eq} =$ ؟

جلسه: سوم   تاریخ: ۱۳۹۸/۰۱/۱۹

« فصل دوم »

ارتعاشات آزاد:

معادلات حرکت مربوط به ارتعاشات آزاد؛



$$\xrightarrow{\text{معادله نیوتن}} \sum \vec{F} = m\,\vec{a}$$

$$\overset{2}{\Rightarrow} \quad a = 0 \qquad \sum \vec{F} = 0 \ \ggg \ m\,g - k\,\Delta = 0 \ \ggg \ \boxed{mg = k\Delta}$$

$$\overset{3}{\Rightarrow} \quad a \neq 0 \quad , \quad a = \ddot{x} \ \ggg\ggg \ \sum \vec{F} = m\,\ddot{x}$$

$$mg - k(\Delta + x) = m\ddot{x}$$

$$mg - k\Delta - kx = m\ddot{x}$$

$$\cancel{mg - mg} - kx = m\ddot{x}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله حرکت}} \boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$$

اگر فرض کنیم $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$ $\left(\omega_n^2 = \frac{x\ \text{ضریب}}{\ddot{x}\ \text{ضریب}}\right)$ که به ω_n فرکانس طبیعی سیستم می گوییم.

اگر در رابطه مربوط به معادله حرکت ω_n را قرار دهیم داریم؛

$$\ddot{x} + \omega_n^2\, x = 0$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیلی بالا به صورت زیر نوشته می شود؛

$$x = A\, sin\,(\omega_n t) + B\, cos\,(\omega_n t)$$

توضیح:

اگر در معادله بالا از شرایط اولیه یعنی میزان جابه جایی در زمان صفر (x_0) و میزان سرعت در زمان صفر (x_0^0) تعیین می گردد.

با قرار دادن شرایط مرزی در معادله جواب بصورت زیر می شود؛

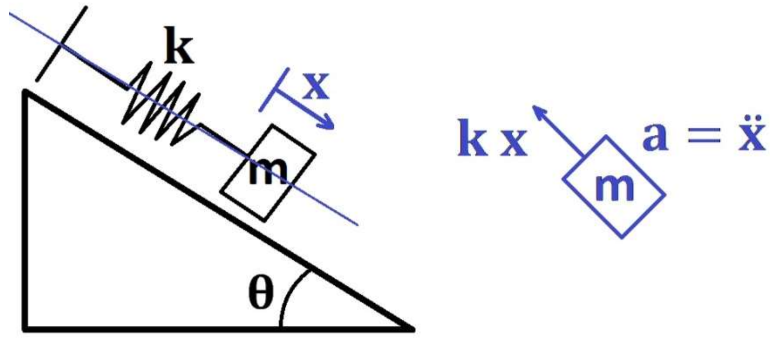
$$x = \underbrace{\frac{\dot{x_0}}{\omega_n}}_{A}\, sin\,(\omega_n t) + \underbrace{x_0}_{B}\, cos\,(\omega_n t)$$

روش های تعیین فرکانس طبیعی یک سیستم:

- روش نیوتن √
- روش انرژی √
- روش ریلی √
- روش لاگرانژ ×
- روش کار مجازی ×

✓ **مثال: (روش نیوتن)**

فرکانس طبیعی جرم و فنر ساده بر روی سطح شیب دار در شکل زیر را تعیین کنید؟



$$\sum \vec{F} = m\,\vec{a}$$

$$-kx = m\ddot{x} \quad \ggg\ggg \quad m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \gg \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

✓ **روش انرژی:**

در یک سیستم پایستار، انرژی کل ثابت بوده و معادلات دیفرانسیل حرکت را می توان از پایستگی انرژی بدست آورد برای یک سیستم بدون میرایی با ارتعاش آزاد جزئی از انرژی به صورت جنبشی و بخشی دیگر به صورت انرژی پتانسیل است. انرژی جنبشی به صورت سرعت یک جرم در آن ذخیره می شود و انرژی پتانسیل به صورت انرژی کرنشی تغییر شکل الاستیکی فنر یا کار انجام شده در یک محیط نیرو مانند جاذبه ذخیره می گردد.

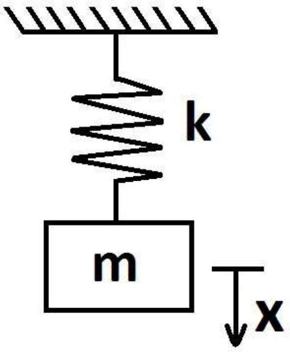
بنابراین خواهیم داشت؛

$\mathbf{U} =$ انرژی پتانسیل $\mathbf{T} =$ انرژی جنبشی $\mathbf{T} + \mathbf{U} =$ مقدار ثابت

$$\xRightarrow{\text{مشتق}} \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}(\mathbf{T} + \mathbf{U}) = \mathbf{0}$$

مثال:

فرکانس طبیعی سیستم شکل زیر را با استفاده از روش انرژی بدست آورید؟



$x =$ جابه جایی

$\dot{x} =$ سرعت

$\ddot{x} =$ شتاب

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

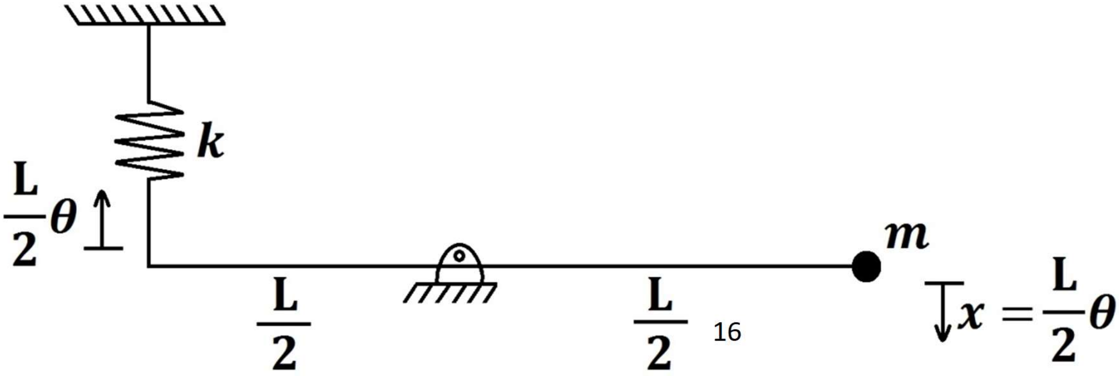
$$\frac{d}{dt}(T+U) = 0 \quad \ggg \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{1}{2}m(2\dot{x}\ddot{x}) + \frac{1}{2}k(2x\dot{x}) = 0$$

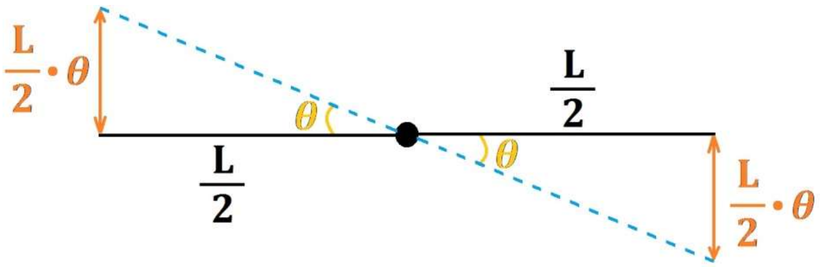
$$\overbrace{\underbrace{m\ddot{x} + kx = 0 \quad \ggg \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}}}$$

مثال:

فرکانس طبیعی سیستم شکل زیر را با استفاده از روش انرژی بدست آورید؟



حل:



$$x = \frac{L}{2}\theta$$

$$\dot{x} = \frac{L}{2}\dot{\theta}$$

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\mathrm{m}\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}\right)^2$$

$$\mathrm{U} = \frac{1}{2}\mathrm{k}\left(\frac{L}{2}\theta\right)^2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\mathrm{T}+\mathrm{U}) = 0 \quad \gg\gg \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\frac{1}{2}\mathrm{m}\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\mathrm{k}\left(\frac{L}{2}\theta\right)^2\right] = 0$$

$$\xRightarrow{\text{مشتق}} \frac{1}{2}\mathrm{m}\frac{L^2}{4}(2\dot{\theta}\ddot{\theta}) + \frac{1}{2}\mathrm{k}\frac{L^2}{4}(2\theta\dot{\theta}) = 0$$

$$\underbrace{\frac{mL}{2}}_{m}\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{\mathrm{kL}}{2}}_{k}\theta = 0 \qquad \gg\gg\gg\gg \qquad \boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{\frac{k\,L}{2}}{\frac{m\,L}{2}}} = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

✓ روش ریلی:

در این روش انرژی جنبشی سیستم به صورت $\left(\mathrm{T} = \frac{1}{2}\mathrm{m_{eff}}\,\dot{\mathrm{x}}^2\right)$ است. که در این معادله $\mathrm{m_{eff}}$ جرم موثر یا جرم معادله متمرکز در نقطه ای تعیین شده با سرعت $\dot{\mathrm{x}}$ است. اگر سختی در آن نقطه زیر مشخص باشد و با $\mathrm{k_{eff}}$ نمایش داده می شود.

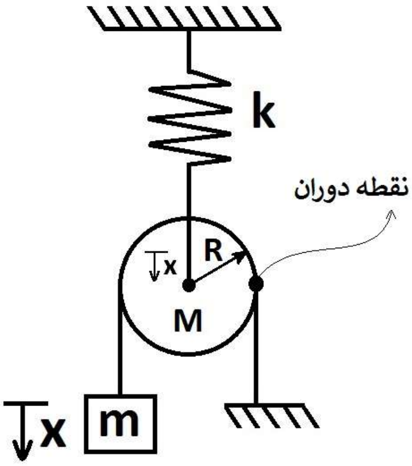
فرکانس طبیعی را می توان از رابطه ساده $\omega_n = \sqrt{\frac{\mathrm{k_{eff}}}{\mathrm{m_{eff}}}}$ محاسبه کرد.

*eff= افکتیو

جلسه: چهارم   تاریخ: ۱۳۹۸/۰۱/۲۶

مثال:

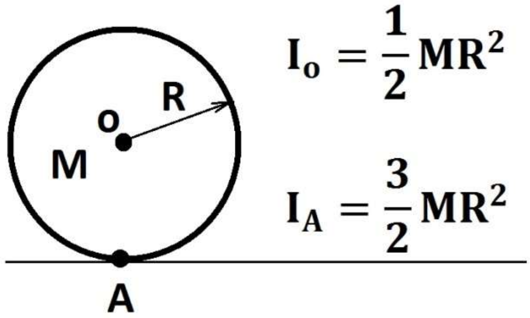
فرکانس طبیعی سیستم زیر را بدست آورید؟ (با استفاده از روش ریلی)



$$\mathbf{M = \frac{10}{3} m}$$

$$\mathbf{I_o = \frac{1}{2} MR^2}$$

توجه:



$$\mathbf{I_o = \frac{1}{2} MR^2}$$

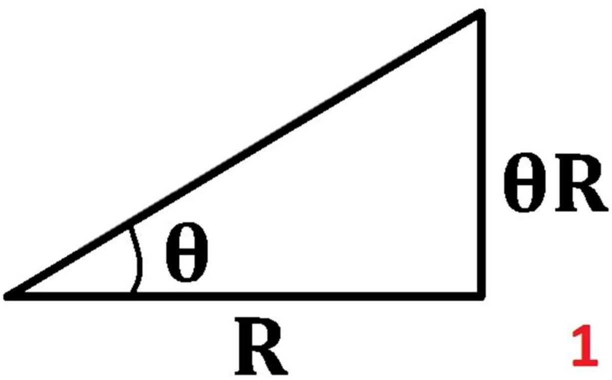
$$\mathbf{I_A = \frac{3}{2} MR^2}$$

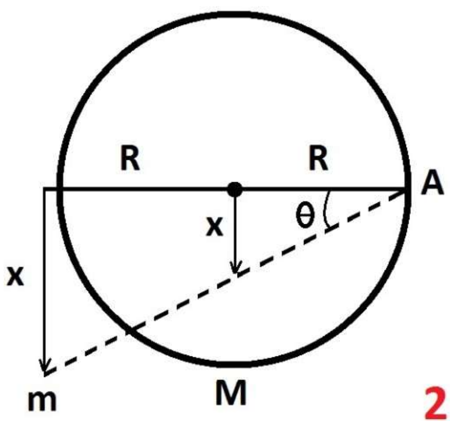
$$\xrightarrow{\text{جنبشی}} \mathbf{T = \frac{1}{2} \overbrace{m}^{m_{eff}} v^2}$$

$$\xrightarrow{\text{پتانسیل}} \mathbf{U = \frac{1}{2} \underbrace{k}_{k_{eff}} v^2}$$

$$\boldsymbol{\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eff}}{m_{eff}}}}$$

حل:





$$\overset{2}{\Rightarrow} \frac{R}{x_M} = \frac{2R}{x_m} \ggg\gg x_M = \frac{x_m}{2} \ggg\gg \underbrace{x_m = 2\,x_M}_{\dot{x}_m = 2\,\dot{x}_M}$$

$$\overset{1}{\Rightarrow} \dot{x}_M = R\,\dot{\theta} \ggg\gg \dot{\theta} = \frac{\dot{x}_M}{R}$$

$$\xrightarrow{\text{جنبشی}} T = \underbrace{\overbrace{\frac{1}{2}\, m\, \dot{x}_M^{\,2}}^{\text{حرکت در جهت } x} + \overbrace{\frac{1}{2} I_A \dot{\theta}^2}^{\text{گردش}}}_{\text{قرقره}} + \underbrace{\frac{1}{2} m\, (\dot{x}_m)^2}_{\text{جرم } m}$$

$$T = \frac{1}{2}\, M\, \dot{x}_M^{\,2} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} MR^2\right)\left(\frac{\dot{x}_M}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}\, \underbrace{m}_{\frac{3}{10}M}\, (2\,\dot{x}_M)^2$$

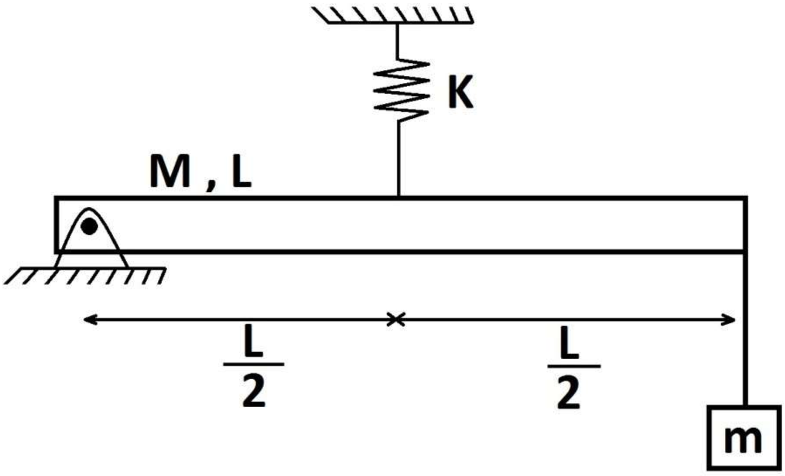
$$T = \frac{1}{2}\, \underbrace{\left[M + \frac{3}{2} M + \frac{12}{10} M\right]}_{M_{eff} = \frac{37}{10} M} \dot{x}_M^{\,2}$$

$$\xrightarrow{\text{پتانسیل}} U = \frac{1}{2}\, \underbrace{k}_{k_{eff}}\, x_M^{\,2}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eff}}{m_{eff}}} = \sqrt{\frac{k}{\frac{37}{10}\, M}} = \underbrace{\overbrace{\sqrt{\frac{37\,M}{10\,k}}}}$$

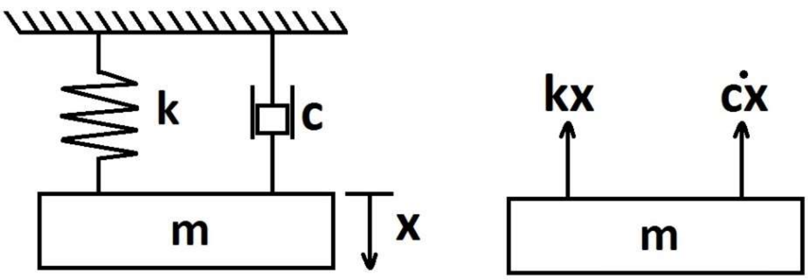
تمرین:

فرکانس طبیعی سیستم شکل زیر را با استفاده از سه روش (نیوتن ـ انرژی ـ ریلی) محاسبه کنید؟ و نتایج را با هم مقایسه کنید؟



ارتعاشات آزاد با میرایی لزج (ویسکوز):

C= ضریب میرایی مستهلک کننده (دمپر)



معادله نیوتن؛

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{M\,A}$$

$$-\mathbf{kx} - \mathbf{c\dot{x}} = \mathbf{m\,\ddot{x}}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله حرکت ارتعاش آزاد با میرایی لزج}} \mathbf{kx} + \mathbf{c\dot{x}} + \mathbf{m\,\ddot{x}} = \mathbf{0}$$

میرایی بحرانی را به صورت زیر تعریف می کنیم؛

$$c_c = 2\,\mathrm{m}\,\omega_n = 2\,m\,\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\,\sqrt{k\,m}$$

هر میرایی دیگر را می توان بر حسب میرایی بحرانی و توسط عدد بدون بعد ξ (زِتا) بیان کرد.

$$\xi = \frac{c}{c_c}$$

پس معادله حرکت را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\ddot{x} + 2\,\xi\,\omega_n\,\dot{x} + \omega_n^2\,x = 0$$

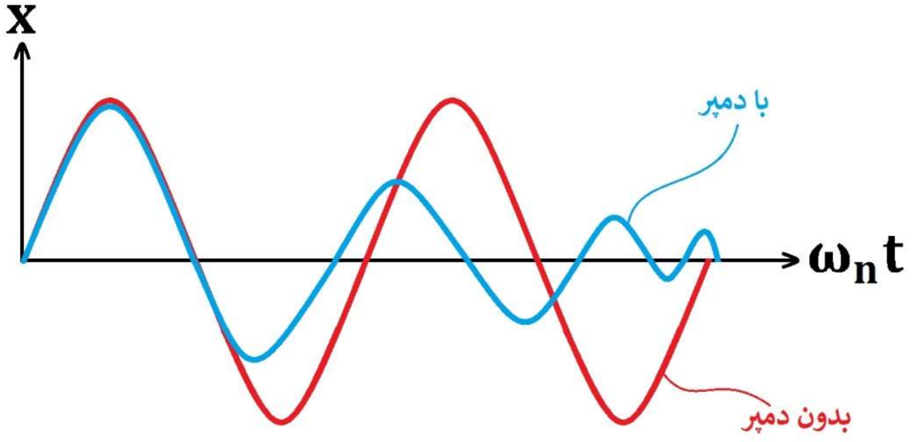
معادله بالا برای حالت های مختلف ξ (زِتا) به صورت زیر حل می شود؛

الف) اگر $1 > \xi$ باشد (کم میرا)

$$\times\times \quad x = e^{-\xi\,\omega_n\,t}\left(A\,e^{i\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t} + B\,e^{-i\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t}\right)$$

با قرار دادن شرایط مرزی فرکانس ارتعاشات میرا برابر است با :

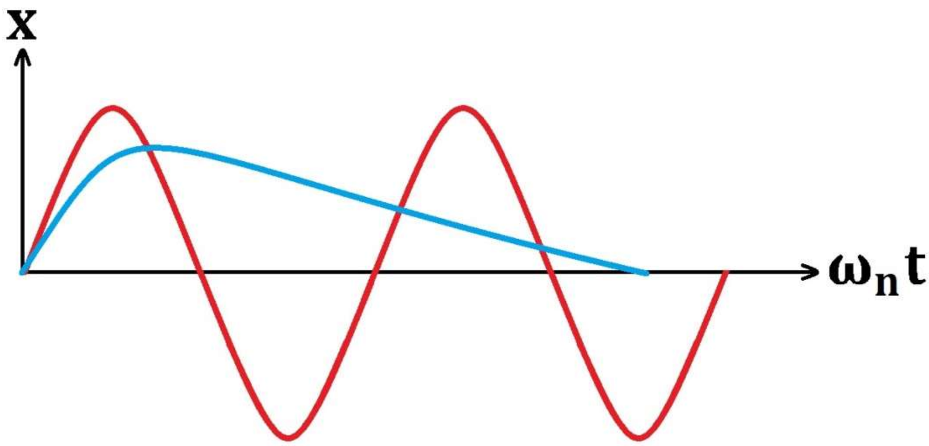
$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$



برای $\xi < 1$

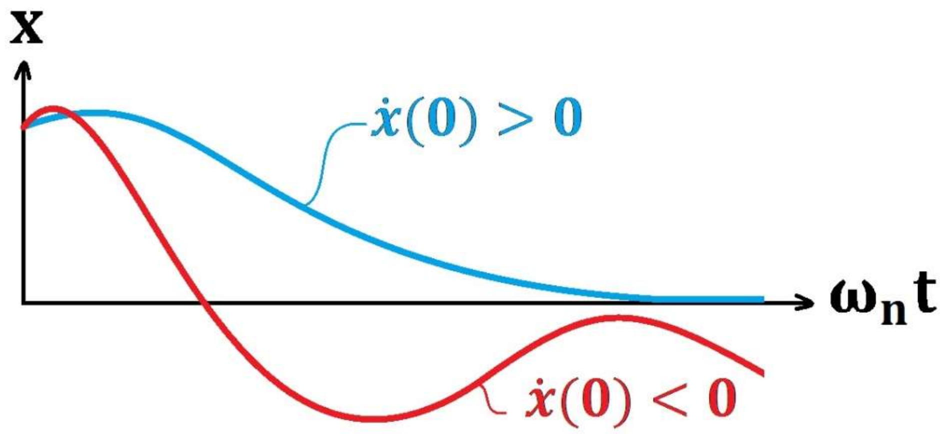
ب) اگر $1 < \xi$ باشد (بیش میرا)

$$\times\times \qquad x = A\, e^{\left(-\xi+\sqrt{\xi^{2}-1}\right)\omega_n t} + B\, e^{\left(-\xi-\sqrt{\xi-1}\right)\omega_n t}$$



ج) اگر $1 = \xi$ باشد (بحرانی)

$$x = [x(0) + [\dot{x}(0) + \omega_n\, x(0)]t]e^{-\xi\, \omega_n\, t}$$



جلسه: پنجم تاریخ: ۱۳۹۸/۰۲/۰۹

کاهش لگاریتمی:

یک راه مناسب برای تعیین میرایی یک سیستم اندازه گیری آهنگ کاهش نوسانات آزاد است.