جزوه دینامیک

یکشنبه, ۲۵ اسفند ۱۳۹۸ ۱۰:۵۲ ب.ظ

جلسه اول

بخش I دینامیک ذرات

فصل ۱ مقدمه‌ای بر دینامیک ۱
فصل ۲ سینماتیک ذرات ۱۹
فصل ۳ سینتیک ذرات ۱۳۳
فصل ٤ سینتیک سیستم ذرات ۲۸۵

بخش II دینامیک اجسام صلب

فصل ٥ سینماتیک اجسام صلب در صفحه ۳۵۱
فصل ٦ سینتیک اجسام صلب درصفحه ٤٤۹
فصل ۷ مقدمه‌ای بر دینامیک سه بعدی اجسام صلب ٥٦۳
فصل ۸ ارتعاش و پاسخ زمانی ٦٤۷

نحوه ارزیابی:

حضور در کلاس وتمرین >>>> ۳ نمره

میان ترم >>>> ۵ نمره

پایان ترم >>>> ۱۲ نمره

مقدمه

۱-۱ تعریف علم مکانیک:

علم مکانیک علمی است که شرایط سکون و حرکت اجسام تحت تاثیر نیرو را بررسی می‌کند.

حوزه‌های علم مکانیک:
- ۱- مکانیک اجسام صلب
  - استاتیک: اجسام صلب ساکن را مورد بررسی قرار می‌دهد.
  - دینامیک: اجسام صلب متحرک را مورد بررسی قرار می‌دهد.
- ۲- مکانیک اجسام تغییرشکل‌پذیر (مقاومت مصالح)
- ۳- مکانیک سیالات (مایعات و گازها)

کاربردهای دینامیک

فقط از زمانی که ماشینها و سازه‌هایی با سرعت زیاد و شتابهای قابل توجه به کار افتادند، محاسبات بر اساس اصول دینامیک در مقایسه با اصول استاتیک ضروری‌تر شد. امروزه رشد سریع تکنولوژی افزایش کاربردهای اصول مکانیک به ویژه دینامیک را طلب می‌کند. این اصول مبنای تحلیل و طراحی سازه‌های متحرک، سازه‌های ثابت با بارهای ضربه‌ای، روباتها، سیستمهای کنترل اتوماتیک، راکتها، موشکها، فضاپیماها، وسایل حمل و نقل زمینی، دریایی و هوایی، بالستیک الکترونی در دستگاههای الکتریکی، و انواع ماشینها نظیر توربینها، پمپها، موتورهای پیستونی، بالابرها، ماشینهای ابزار و غیره می‌باشد.

مفاهیم اساسی

فضا: ناحیه هندسی اشغال شده توسط جسم می‌باشد.

زمان: عبارت است از سنجش وقایع متوالی است که در مکانیک نیوتنی به عنوان کمیت مطلق در نظر گرفته می‌شود.

جرم: عبارت از سنجش کمی اینرسی یا مقاومت در مقابل تغییر حرکت یک جسم است. همچنین جرم را می‌توان کمیت مادی موجود در یک جسم در نظر گرفت که سبب جاذبه ثقلی می‌شود.

ذره: جسمی است با ابعاد ناچیز. همچنین، هنگامی که ابعاد جسمی در توصیف حرکت ان یا عمل نیروهای وارد بر آن بی‌تاثیر باشند، با آن جسم می‌توان به صورت یک ذره برخورد کرد. مثلا، برای توصیف مسیر پرواز هواپیما، می‌توان آن را به صورت یک ذره در نظر گرفت.

جسم صلب: جسمی است که تغییر شکل آن در مقایسه با ابعاد کلی و یا تغییر مکان جسم به عنوان یک کل، ناچیز

بردار و اسکالر: کمیتهای هستند که در کتاب استاتیک مورد بحث بسیار قرار گرفته‌اند

قوانین نیوتن

قانون اول: تا هنگامیکه نیروی نامتوازنی به یک ذره اثر نکند، یا ساکن می‌ماند و یا به حرکت مستقیم الخط با سرعت ثابت ادامه می‌دهد.

قانون دوم: شتاب یک ذره متناسب با برآیند نیروهای وارد بر آن بوده و در جهت این نیرو* می‌باشد. $F=ma$

قانون سوم: نیروهای عمل و عکس‌العمل میان اجسام عمل کننده با تاثیر متقابل، از نظر اندازه، مساوی و در جهت مخالف یکدیگر بوده و هم راستا هستند.

آحاد

سیستم بین المللی آحاد متریک (SI) در این کتاب معرفی و استفاده شده است.
در جدول زیر چهار کمیت اساسی مکانیک و واحدها و نمادهای انها در دو سیستم خلاصه شده‌اند:

در جدول زیر چهار کمیت اساسی مکانیک و واحدها و نمادهای آنها در دو سیستم خلاصه شده‌اند:

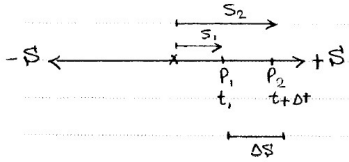
کمیت	نماد ابعادی		آحادSI			آحاد متداول آمریکایی		
			واحد	نماد		نماد	واحد	
جرم	M	آحاد اصلی	کیلوگرم	kg	آحاد اصلی	slug	اسلاگ	
طول	L		متر	m		ft	فوت	
زمان	T		ثانیه	s		sec	ثانیه	
نیرو	F		نیوتن	N		lb	پوند	

آحادSI	آحاد متداول آمریکایی
$(1\ N) = (1\ kg)\ (1\ m/s^2)$	$(1\ lb) = (1\ slug)\ (1 ft/sec^2)$
$N = kg\ .\ m/s^2$	$slug = lb\text{-}sec^2/ft$

سینماتیک ذرات

* سینماتیک ذرات

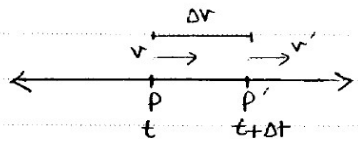
- حرکت مستقیم الخط



سرعت متوسط: $v_{av} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

سرعت لحظه‌ای: $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$ I

واحد سرعت = $\frac{\text{واحد مسافت}}{\text{واحد زمان}}$: m/s ، Km/s ...



شتاب متوسط $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

شتاب لحظه‌ای $a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}$ II

واحد شتاب = $\frac{\text{واحد سرعت}}{\text{واحد زمان}} = \frac{\text{واحد مسافت}}{(\text{واحد زمان})^2}$: m/s^2 ...

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s} \quad \text{III}$$

$$\text{(I)} \rightarrow v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow dt = \frac{ds}{v}$$

$$\text{(II)} \rightarrow a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dv}{a}$$

$$\rightarrow \frac{ds}{v} = \frac{dv}{a}$$

$$\Rightarrow v\,dv = a\,ds \quad \text{IV}$$

رابطه مستقل از زمان

* معادلات:

بردار مکان	سرعت	شتاب	معادله ارتباط بین مکان، سرعت و شتاب
s	$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$	$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$ $a = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}$	$v\,dv = a\,ds$

مثال: برای یک نقطه مادی که دارای حرکت در راستای مستقیم و با معادله $s = t^4 - 6t^2 + 1$ می‌باشد، تغییرات مسافت، سرعت و شتاب را بر حسب زمان رسم کنید. (کلیه حسب متر)

$$s = t^4 - 6t^2 + 1$$

$$v = \frac{ds}{dt} = 4t^3 - 12t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t^2 - 12$$

جلسه دوم

* نمودار ها:

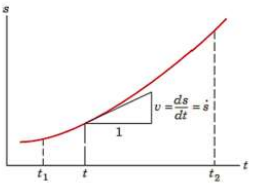
✓ نمودار s بر حسب t :

در هر لحظه، مکان را به ما می دهد.

شیب خط مماس(مشتق) برابر سرعت است.

مساحت زیر نمودار(انتگرال) اطلاعات خاصی نمی‌دهد.

$$\text{شیب} = \tan\theta = \frac{ds}{dt} = v$$



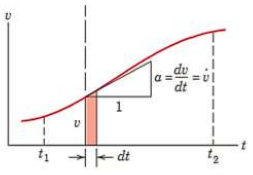
✓ نمودار v بر حسب t :

در هر لحظه، سرعت را به ما می‌دهد ؛ شیب خط مماس(مشتق) برابر شتاب است.

مساحت زیر نمودار(انتگرال) برابر جابه‌جایی است. (بالای محور+ و پایین محور- است)

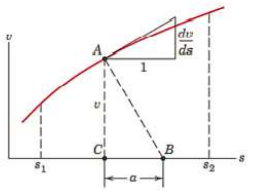
$$\text{شیب} = \tan\theta = \frac{dv}{dt} = a$$

$$\text{مساحت زیر نمودار} = s_2 - s_1$$



✓ نمودار v بر حسب s :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dV}{ds} = \frac{a}{v} \\ v \rightarrow \text{از روی نمودار} \end{array}\right\} \Rightarrow a \rightarrow \text{به دست می آید}$$

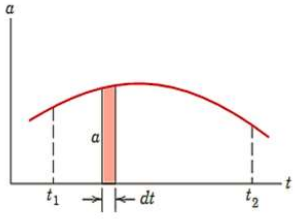


✓ نمودار a بر حسب t :

سطح زیر نمودار، سرعت را به دست می‌دهد.

$$\text{سطح زیر نمودار} = \int a\,dt = \int dv = v$$

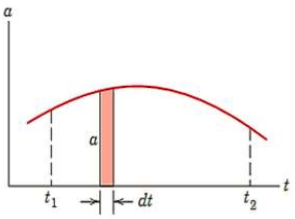
$$v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a\,dt$$



✓ نمودار a بر حسب s :

$$\text{سطح زیر نمودار} = \int_{s_1}^{s_2} a\,ds$$

✓ نمودار a بر حسب t :

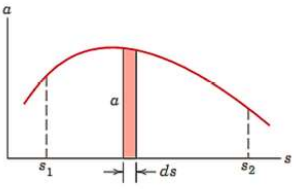


سطح زیر نمودار، سرعت را به دست می‌دهد.

$$\text{سطح زیر نمودار} = \int adt = \int dv = v$$

$$v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} adt$$

✓ نمودار a بر حسب s :



$$\text{سطح زیر نمودار} = \int_{s_1}^{s_2} ads$$

$$\int_{V_1}^{V_2} vdv = \int_{s_1}^{s_2} ads$$

$$\text{سطح زیر نمودار} = \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \int_{s_1}^{s_2} ads$$

✓ نمودار a بر حسب v :

اطلاعات خاصی به ما نمی‌دهد.

چند نکته

۱) اگر تابع $s = f(t)$ یعنی تابع مکان بر حسب زمان را داشته باشیم، آنگاه اگر یک بار از آن مشتق بگیریم، تابع سرعت بر حسب زمان به دست می‌آید و اگر دو بار از آن مشتق بگیریم، تابع شتاب بر حسب زمان به دست می‌آید.

۲) اگر سرعت ثابت باشد، آنگاه مکان از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$s = vt + s_0$$

۳) اگر شتاب ثابت باشد، آنگاه سرعت و مکان از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$v = at + v_0$$

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$$

$$v^2 - {v_0}^2 = 2a(s - s_0)$$

۴) اگر شتاب، تابعی از زمان باشد (یعنی: $a = f(t)$) آنگاه تابع سرعت و تابع جابه‌جایی از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$s = \int_0^t vdt + s_0 \quad ; \quad v = \int_0^t f(t)dt + v_0$$

۵) اگر شتاب، تابعی از مکان باشد (یعنی: $a = f(s)$) آنگاه تابع سرعت از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$v^2 = {v_0}^2 + 2\int_{s_0}^{s} f(s)ds$$

۶) اگر شتاب، تابعی از سرعت باشد (یعنی: $a = f(v)$) آنگاه تابع مکان از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$s = s_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{v}{f(v)}dv$$

الف ـ شتاب صفر

$a=0 \Rightarrow a=\frac{dv}{dt}=0 \Rightarrow v=ثابت$

$v=\frac{ds}{dt}=ثابت \Rightarrow ds=vdt$

$\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t v dt \Rightarrow s = vt + s_0$ (I)

ب ـ شتاب ثابت

$a=ثابت \Rightarrow a=\frac{dv}{dt}=ثابت \Rightarrow dv=adt$

$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a dt \Rightarrow v = at + v_0$ (II)

$v=\frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = vdt$

$\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t v dt$

(II) $\Rightarrow \int_0^s ds = \int_0^t (at+v_0)dt$

$\Rightarrow s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$

$\int_{v_0}^{v} v dv = \int_{s_0}^{s} a ds$

$\Rightarrow \left[\frac{1}{2}v^2\right]_{v_0}^{v} = [as]_{s_0}^{s}$

$\Rightarrow v^2 - {v_0}^2 = 2a(s-s_0)$

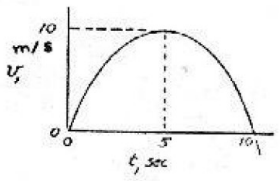
2.1 - ذره‌ای با دستور $s=3+2t^2-(2/15)t^3$ بر خط راست پیش‌می‌رود. نمودار تندی آن را برای 10 ثانیه بکشید و اندازه شتاب آن را در زمان $t=0.5$ s ،10 s بیابید.

$s=3+2t^2-2/15)t^3 \quad v=s=4t-(2/5)t^2$

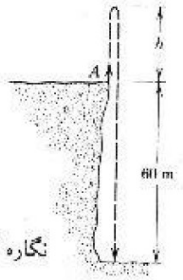
$a=v=4-(4/5)t$

$t=0,\ a_0=4\ m/s^2 \quad t=5\ sec,\ a_5=0$

$t=10\ sec \quad a_{10}=-4\ m/s^2$



2.9 - توپی را از A با تندی $24\ m/s$ به بالا پرتاب می‌کنیم. اندازه بلندی h و زمان رسیدن توپ به زمین چیست؟



نگاره 2.9

$y=v_0t+(1/2)at^2 \quad y=24t-1/2(9.81)t^2$

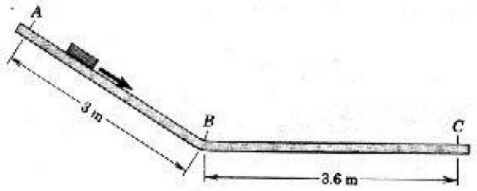
$y=-60\ m \quad -60=24t-4.905t^2$

$4.905t^2-24t-60=0 \quad t=32.93\ s \ (or\ -8.93\ s)$

$y=0 \quad v^2=v_0^2+2ay$

$y=h=(0-24^2)/(-2(9.81))=29.4\ m$

2.18 - بسته‌ها با تندی $1.2\ m/s$ از A رها شده و تا B، با شتاب $0.3\ g$ پایین می‌اید. اگر پس از $2.8\ s$ از A رها شد، در C بایستد، شتاب آنها از B تا C چیست؟ زمان رفتن از B تا C را نیز بیابید.



نگاره 2.18

A - B

$v_B^2=v_A^2+2a\Delta s=1.2^2+2(0.3)(9.81)(3)=10.269 \quad m^2/s^2$

$v_B=3.2\ m/s \quad v_B=v_A+at \quad t_B=2.038\ s$

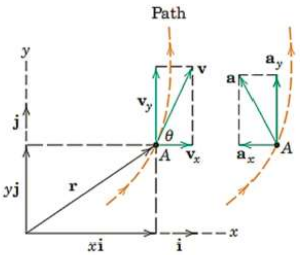
$\Delta t=t_C-t_B=2.8-2.038=.762\ sec$

$v_C^2=v_B^2+2a\Delta s \quad 0=10.24+2a(3.6) \quad a=-1.42\ m/s^2$

حرکت منحنی الخط در صفحه (دو بُعد)

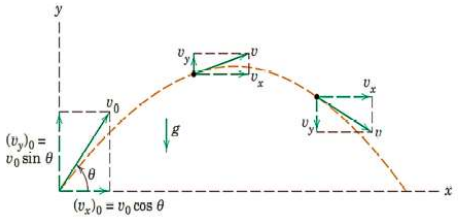
* دستگاه مختصات مستطیلی (x,y)

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$
$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}$$
$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}$$



- ✓ مولفه‌های سرعت: $v_x = \dot{x} \quad , \quad v_y = \dot{y}$
- ✓ اندازه‌ی سرعت: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$
- ✓ شیب بردار سرعت: $\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$
- ✓ مولفه‌های شتاب: $a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \quad , \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$
- ✓ اندازه‌ی شتاب: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

* حرکت پرتابه (نمونه‌ای از حرکت منحنی الخط در صفحه)



حرکت در امتداد x

$a_x = 0 \quad , \quad v_x = v_0\cos\theta$

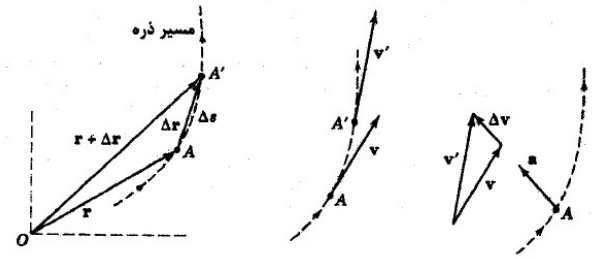
$x - x_0 = (v_0\cos\theta)t$

حرکت در امتداد y

$a_y = -g \quad , \quad v_y = -gt + v_0\sin\theta$

$y - y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0\sin\theta)t$

$v_y^2 - (v_0\sin\theta)^2 = -2g(y - y_0)$



سرعت لحظه‌ای v ذره به

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}}$$

2.57 - ذره‌ای به $x=3t^2-4t$ و $y=4t^2-\frac{t^3}{3}$ پیش‌می‌رود. تندی و شتاب آن در $t=2\ s$ چیست؟

$x=3t^2-4t \quad \dot{x}=6t-4 \quad \ddot{x}=6\ mm/s^2 \quad y=4t^2-t^3/3 \quad \dot{y}=8t-t^2$

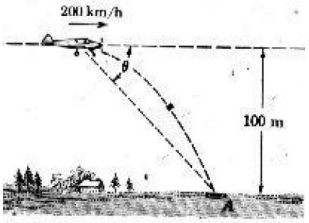
$\ddot{y}=8-2t\ mm/s^2$, $t=2\ s \Rightarrow \dot{x}=12-4=8\ mm/s$

$\dot{y}=16-4=12\ mm/s \quad v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{8^2+12^2}=14.42\ mm/s$

$\theta_x=\tan^{-1}(\dot{y}/\dot{x})=56.3^o \quad \ddot{x}=6\ mm/s^2 \quad \ddot{y}=8-4=4\ mm/s^2$

$a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}=\sqrt{6^2+4^2}=7.21\ mm/s^2$

2.68 - زاویه دید θ چه باشد تا بسته رها شده از هواپیما، در A بیفتد؟

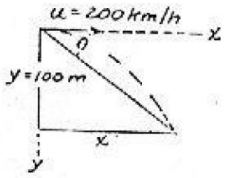


y-motion: $a_y=g=9.81\ m/s^2 \quad y=gt^2/2$

x-motion: $a_x=0 \quad x=ut \Rightarrow y=gx^2/(2u^2) \quad x=u\sqrt{2y/g}$

$x=(200/3.6)\sqrt{2(100)/9.81}=251\ m,$

$\theta=\tan^{-1}(y/x)=\tan^{-1}(100/251)=21.7^o$

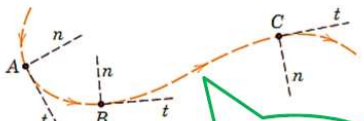


جلسه سوم

* دستگاه مختصات عمودی و مماسی (n,t)

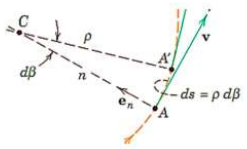
$$\begin{cases} \vec{v}=ve_t \\ v=\rho\dot{\beta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{a}=a_ne_n+a_te_t \\ a_n=\rho\dot{\beta}^2=\dfrac{v^2}{\rho} \\ a_t=\rho\ddot{\beta} \\ a=\sqrt{a_n^2+a_t^2} \end{cases}$$



در نقاط عطف، شعاع انحنا نداریم؛ در نتیجه:

$a_n=0$



در این فرمول‌ها، ρ شعاع انحنا و β زاویه‌ای است که طی حرکت روی مسیر، ایجاد می‌شود.