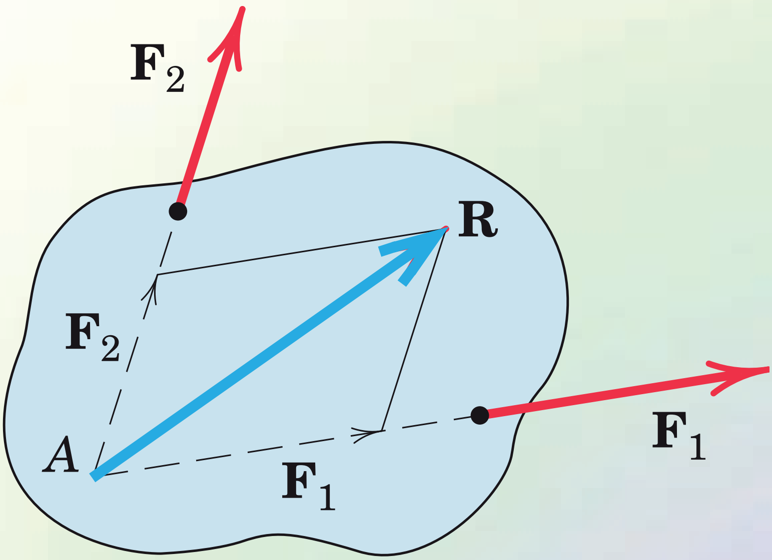
فصل دوم

بُردارها



بخش اول — استاتیک

هدف‌های رفتاری

پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

۱- کمیت‌های فیزیکی را بشناسد.

۲- انواع بردارها را تعریف نماید.

۳- جمع و تفریق بردارها را به روش ترسیمی انجام دهد.

۴- یک بردار را به مؤلفه‌های آن تجزیه نماید.

۵- نمایش برداری بردارها را بداند.

۶- مقدار بردار را با استفاده از مؤلفه‌های متعامد آن محاسبه نماید.

۲-۱ کمیت‌های فیزیکی

۲-۱-۱- کمیت‌های عددی یا اسکالر

کمیت‌هایی هستند که فقط دارای اندازه یا مقدار می‌باشند؛ مانند جرم، زمان، طول و کار و انرژی.

۲-۱-۲- کمیت‌های برداری

کمیت‌هایی هستند که علاوه بر مقدار دارای جهت و راستا نیز می‌باشند. مانند: بردارهای نیرو، گشتاور، سرعت، شتاب و جابجایی.

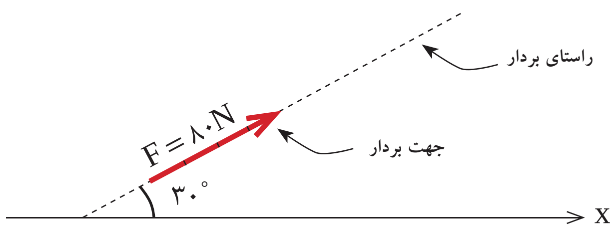
۲-۲ بردارها (Vector)

هر بردار به صورت یک پیکان با طولی متناسب با مقدار آن ترسیم می‌شود به عنوان مثال در شکل (۲-۱)، بردار نیروی ($\vec{F}$) با مقدار ۸۰ N و با زاویه °۳۰ نسبت به محور x و در جهت و راستای نشان داده شده ترسیم شده است.

نکته:

زاویه امتداد هر بردار، با یک امتداد مبنا که معمولاً امتدادهای x یا y است، مشخص می‌شود.

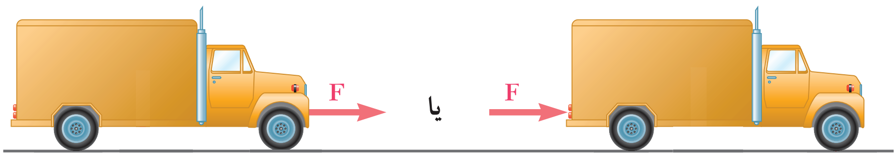
شکل ۲-۱



۲-۳ انواع بردارها

۲-۳-۱- بردار لغزان

برداری است که اگر در راستای خود جابه‌جا شود، اثر آن بر جسم تغییر ننماید. همانند نیروی **F** در شکل (۲-۲)



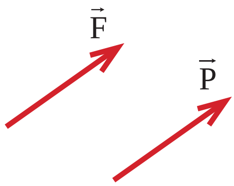
شکل ۲-۲

۲-۳-۲- بردار ثابت

برداری است که مکان معینی را در فضا اشغال می‌کند و نمی‌توان آن‌را جابجا نمود. یعنی با جابه‌جا کردن آن، اثر آن بر جسم تغییر می‌نماید. مثلاً ضربه‌ای که به سر انسان وارد می‌شود با ضربه‌ای که با همان مقدار و همان جهت به پای او وارد می‌آید متفاوت است.

۲-۳-۳- بردارهای هم‌سنگ

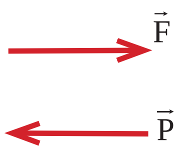
دو بردار مساوی، موازی و هم‌جهت را بردارهای هم‌سنگ می‌نامیم. در شکل (۲-۳) بردارهای $\vec{F}$ و $\vec{P}$ هم‌سنگ‌اند.



شکل ۲-۳

۲-۳-۴- بردارهای زوج

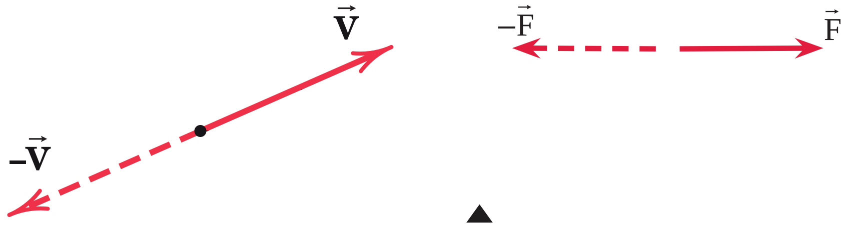
دو بردار مساوی، موازی و مختلف‌الجهت را بردارهای زوج می‌نامیم. در شکل (۲-۴) بردارهای $\vec{F}$ و $\vec{P}$ زوج‌اند.



شکل ۲-۴

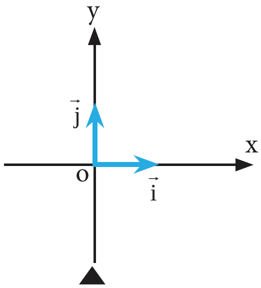
۲-۳-۵- بردارهای مخالف

دو بردار مساوی، هم‌راستا و مختلف‌الجهت را بردارهای مخالف گویند. شکل (۲-۵)



شکل ۲-۵

۲-۳-۶- بردار یکه (واحد)



شکل ۲-۶

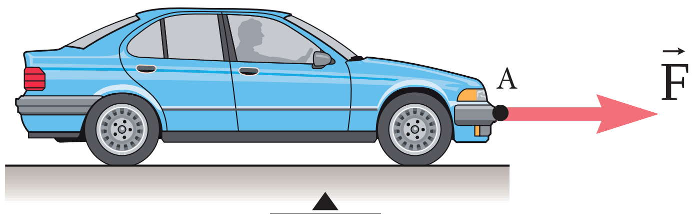
برداری که مقدار (اندازه) آن برابر واحد است را بردار یکه یا واحد می‌نامیم.

بردار واحد روی محور **x** ها را با $\vec{i}$ و روی محور **y** ها را با $\vec{j}$ نمایش می‌دهند. شکل (۲-۶)

۲-۳-۷- بردار نیرو

برداری است که علاوه بر مقدار، جهت و راستا دارای نقطه اثر نیز می‌باشد. در شکل (۲-۷) نقطه **A** ، نقطه‌اثر بردار نیروی $\vec{F}$ می‌باشد.

و واحد اندازه‌گیری نیرو، نیوتن (**N**) است و مطابق قانون دوم نیوتن به صورت زیر تعریف می‌شود:



شکل ۲-۷

تعریف نیوتن با استفاده از قانون دوم نیوتن

یک نیوتن مقدار نیرویی است که اگر به جرم یک کیلوگرم وارد شود، در آن شتابی معادل یک متر بر مجذور ثانیه و در جهت اِعمال نیرو ایجاد نماید.

$$F = m.a$$

$$۱N = ۱kg \times ۱\frac{m}{s^{۲}}$$

۲-۴ جمع و تفریق بردارها

عملیات جمع و تفریق کمیت‌های برداری با جمع و تفریق کمیت‌های عددی (اسکالر) متفاوت است. یعنی نمی‌توان مقادیر عددی دو یا چند بردار، به‌غیر از بردارهای هم‌راستا، و موازی را با یکدیگر جمع و یا تفریق نمود. در این کتاب برای نشان دادن یک بردار مانند $\vec{V}$ از علامت (⟶) در بالای آن استفاده می‌شود و برای نشان دادن مقدار (اندازه) آن بردار علامت (⟶) بالای آن برداشته می‌شود.

$\vec{V}$: بردار V

V : اندازه یا مقدار بردار V

۲-۴-۱- روش‌های جمع و تفریق بردارها

جمع و تفریق بردارها به دو روش ۱- ترسیمی ۲- محاسباتی انجام می‌شود که در این فصل با روش ترسیمی و در فصل بعد با روش‌های محاسباتی آشنا خواهید شد.

۲-۴-۱-۱- روش ترسیمی

در این روش با استفاده از وسایل ترسیم و مقیاس مناسب جمع و تفریق بردارها انجام می‌شود. روش‌های ترسیمی جمع و تفریق بردارها شامل سه روش زیر می‌باشد:

الف) روش مثلث

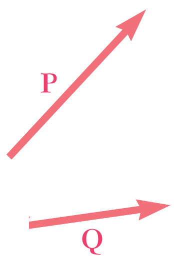
ب) روش متوازی‌الاضلاع

ج) روش چندضلعی

لازم به ذکر است که روش‌های مثلث و متوازی‌الاضلاع برای مجموع یا تفاضل دو بردار و روش چندضلعی برای مجموع یا تفاضل بیش از دو بردار مناسب می‌باشند.

الف) روش مثلث

دو بردار $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ مطابق شکل (۲-۸) مفروض است. برای به‌دست آوردن مجموع آن‌ها یعنی $\vec{P}+\vec{Q}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:



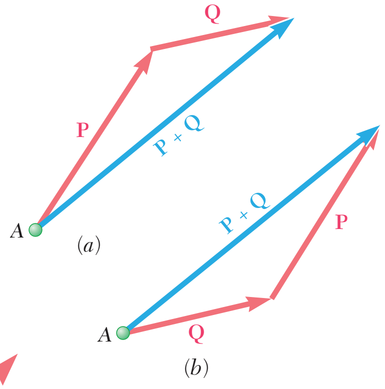
شکل ۲-۸

۱) از نقطه دلخواه مانند **A** هم‌سنگ یکی از بردارها ترسیم می‌شود

۲) از انتهای بردار اول هم‌سنگ بردار دوم ترسیم می‌شود

۳) برداری که از ابتدای بردار اول به انتهای بردار دوم وصل می‌شود مجموع دو بردار خواهد بود که مقدار آن به‌وسیلهٔ خط‌کش مقیاس اندازه‌گیری می‌شود: شکل (۲-۹)

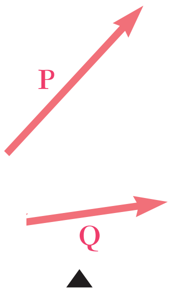
$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} \qquad (۲-۱)$$



شکل ۲-۹

ب) روش متوازی‌الاضلاع

دو بردار $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ مطابق شکل (۲-۱۰) مفروض است و مجموع آن‌ها یعنی $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$ مدنظر می‌باشد. طبق قانون متوازی‌الاضلاع به شرح زیر عمل می‌نمائیم: شکل (۲-۱۱)

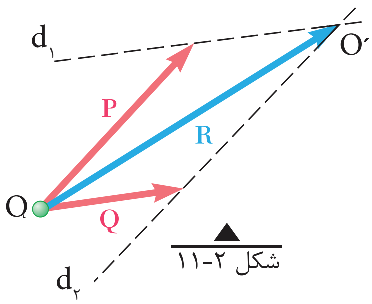


شکل ۲-۱۰

۱) از نقطه دلخواه مانند **O** هم‌سنگ بردارهای $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ را ترسیم می‌نمائیم

۲) از انتهای بردار $\vec{P}$ به موازات بردار $\vec{Q}$ خطی ترسیم می‌شود (خط $d_۱$)

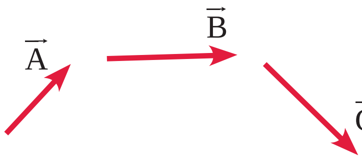
۳) از انتهای بردار $\vec{Q}$ به موازات بردار $\vec{P}$ خطی ترسیم می‌شود (خط $d_۲$) تا خط $d_۱$ را در نقطه **O´** قطع نماید.



شکل ۲-۱۱

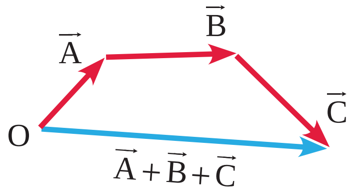
۴) برداری که از **O** به **O'** ترسیم می‌شود همان مجموع دو بردار $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ یعنی $\vec{R}$ خواهد بود که مقدار آن به وسیله خط‌کش مقیاس برداشت می‌شود.

ج) روش چندضلعی



شکل ۲-۱۲

در این روش به منظور ترسیم مجموع چند بردار مانند شکل (۲-۱۲) از یک نقطه دلخواه مانند O هم‌سنگ بردار اول را رسم می‌کنیم و از انتهای بردار رسم شده هم‌سنگ بردار دوم ترسیم می‌شود. این روند تا ترسیم تمامی بردارها ادامه می‌یابد؛ برداری که از ابتدای بردار اول به انتهای بردار آخر رسم می‌شود، مجموع بردارها خواهد بود. شکل (۲-۱۳)



شکل ۲-۱۳

نکته ۱)

هر گاه انتهای آخرین بردار بر ابتدای بردار اول منطبق گردد (یک چندضلعی بسته تشکیل شود)، مجموع بردارها صفر خواهد بود.

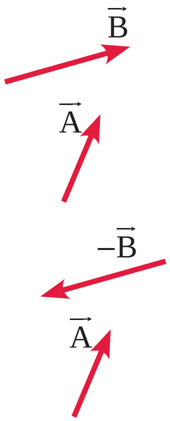
نکته ۲)

در حالتی که بردارها موازی یا هم‌راستا باشند، برای جمع و تفریق آن‌ها کافی‌است با در نظر گرفتن جهت بردارها، آن‌ها را روی یک محور ترسیم نمود.

تذکر:

عملیات تفریق دو یا چند بردار به روش‌های فوق با استفاده از تعریف بردار مخالف مطابق شکل (۲-۱۴) امکان‌پذیر است. یعنی:

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B}) \qquad (۲-۲)$$



شکل ۲-۱۴

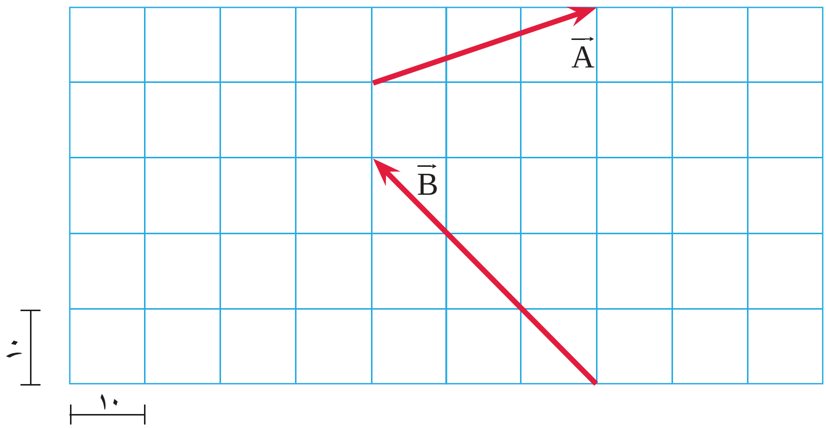
تفاضل بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ به روش مثلث

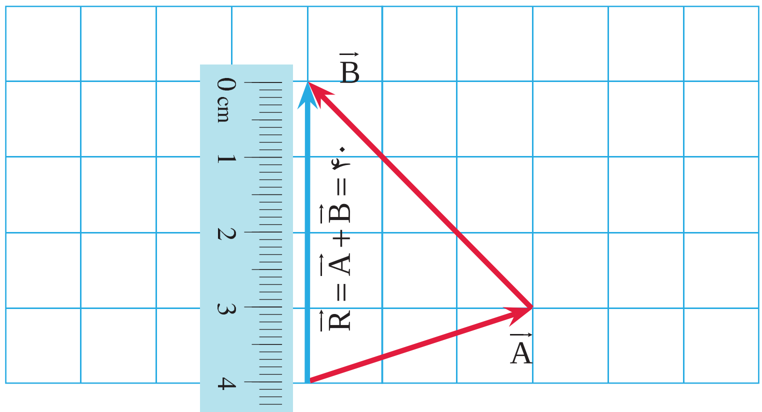
تفاضل بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ به روش متوازی‌الاضلاع

مثال ۱

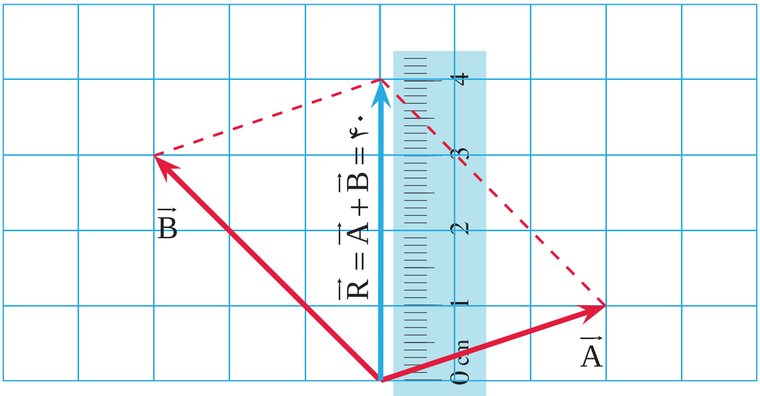
در شکل زیر بردارهای $\vec{A}+\vec{B}$ و $\vec{A}-\vec{B}$ را به روش‌های ترسیمی مثلث و متوازی‌الاضلاع نشان داده و اندازهٔ تقریبی آن‌ها را با خط‌کش مقیاس برداشت نمایید.

(ابعاد شبکه برابر ۱۰ واحد است)

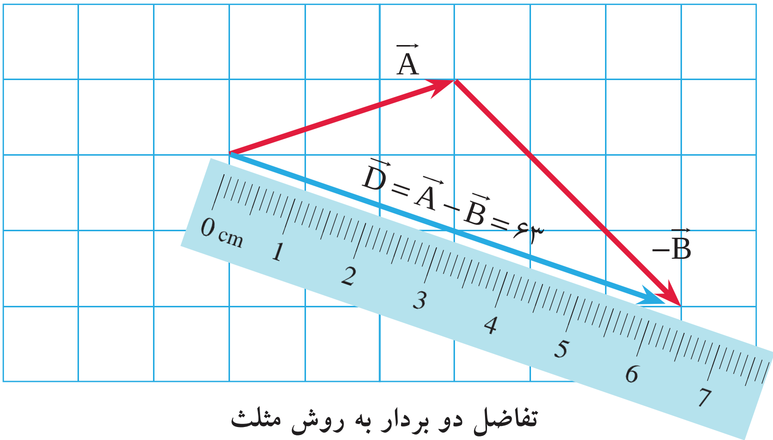




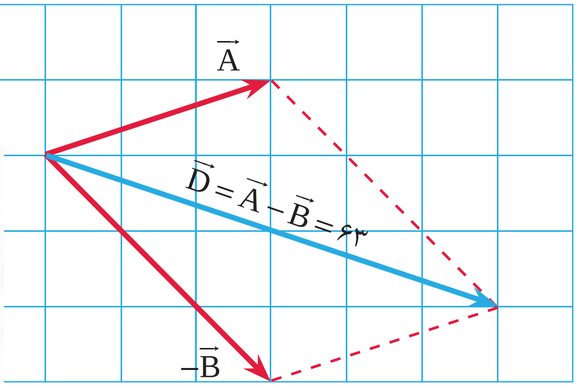
مجموع دو بردار به روش مثلث



مجموع دو بردار به روش متوازی‌الاضلاع



تفاضل دو بردار به روش مثلث



تفاضل دو بردار به روش متوازی‌الاضلاع

خودآزمایی

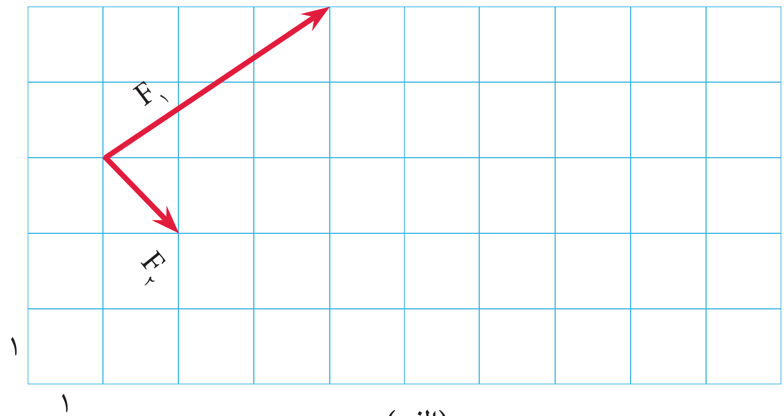
۱- کمیت‌های فیزیکی را نام برده و هر یک را تعریف کنید و مثال بزنید.

۲- از کمیت‌های زیر کدام‌یک اسکالر و کدام‌یک برداری می‌باشند؟

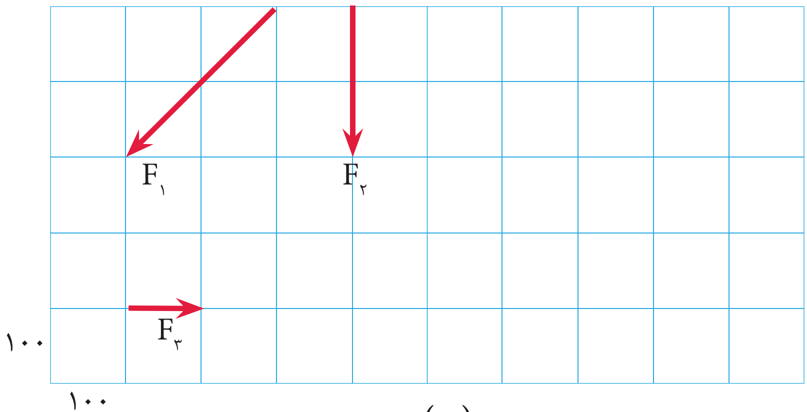
شتاب - وزن - سطح - حجم - جابه‌جایی

۳- انواع بردارها را نام برده و هر کدام را تعریف کنید.

۴- در هر شکل جمع بردارهای داده شده را به روش ترسیمی نشان دهید و اندازه و زاویهٔ بردار برآیند (مجموع آن‌ها) با امتداد افق را با استفاده از خط‌کش و نقاله اندازه‌گیری نمائید.

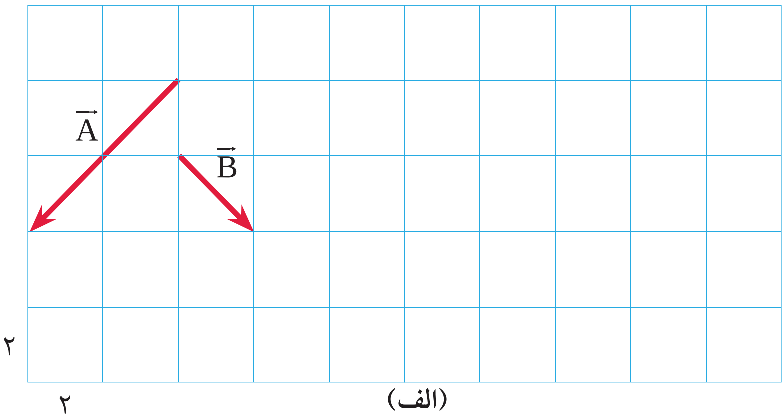


(الف)

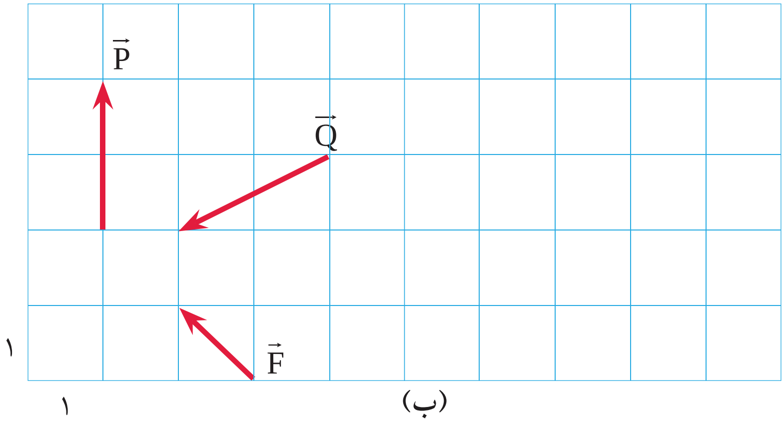


(ب)

۵- در شکل‌های زیر حاصل عبارات $\vec{A}-\vec{B}$ و $\vec{F}-\vec{P}+\vec{Q}$ را به روش ترسیمی تعیین کنید.



(الف)



(ب)

۵-۲ تجزیهٔ یک بردار به مؤلفه‌های آن به روش ترسیمی

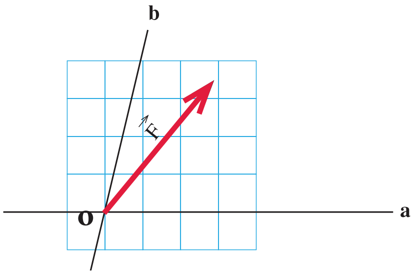
همان‌گونه که در قسمت قبل دیدیم دو بردار با امتداد و مقادیر مشخص را می‌توان با استفاده از روش‌های مثلث یا متوازی‌الاضلاع با یکدیگر جمع نمود و مجموع آن‌ها را به‌دست آورد؛ که این بردارِ مجموع را برآیند دو بردار اولیه نیز می‌نامند. حال چنان‌چه دو امتداد دلخواه در صفحه داشته باشیم و برداری به نام $\vec{F}$ نیز داده شده باشد می‌توان آن را بر روی دو امتداد مورد نظر به شرح ذیل تجزیه نمود که عکس عمل جمع دو بردار می‌باشد. شکل‌های (۲-۱۵) و (۲-۱۶)

۱) از انتهای بردار $\vec{F}$ دو خط به موازات محورهای **a** و **b** ترسیم نموده (خطوط **a'** و **b'**) تا آن‌ها را در نقاط O_1 و O_2 قطع نماید.

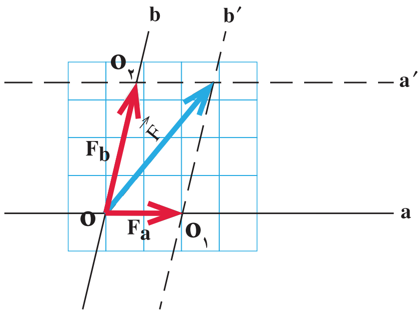
۲) بردار $\overrightarrow{OO_1}$ مؤلفهٔ $\vec{F}$ روی امتداد **a** خواهد بود که با $\overrightarrow{F_a}$ نشان داده می‌شود.

۳) بردار $\overrightarrow{OO_2}$ مؤلفهٔ $\vec{F}$ روی امتداد **b** خواهد بود که با نماد $\overrightarrow{F_b}$ نشان داده می‌شود.

روش فوق، روش کلی برای تجزیهٔ یک بردار است. حالت خاصی از آن تجزیهٔ یک بردار روی دو محور متعامد (عمود بر هم) است که کاربرد زیادی در حل مسائل ایستایی دارد.



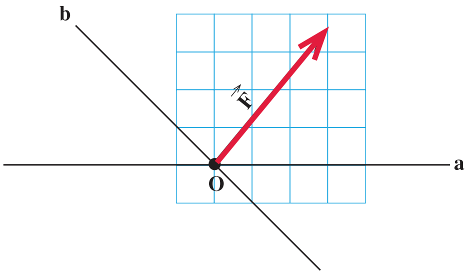
شکل ۲-۱۵



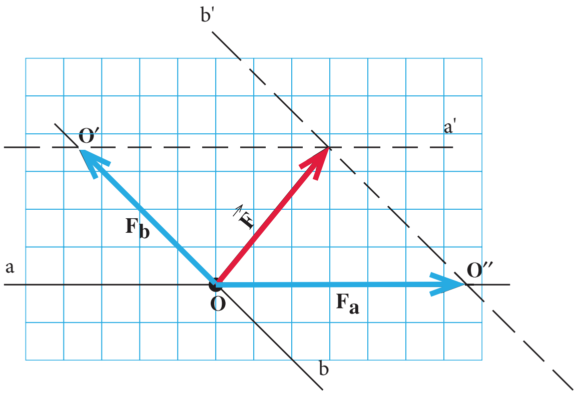
شکل ۲-۱۶

مثال ۲

در شکل روبه‌رو بردار **F** را روی امتدادهای **a** و **b** تجزیه کنید.

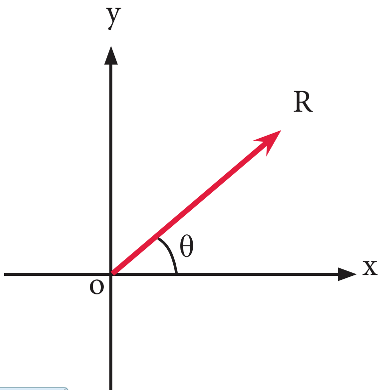


حل:



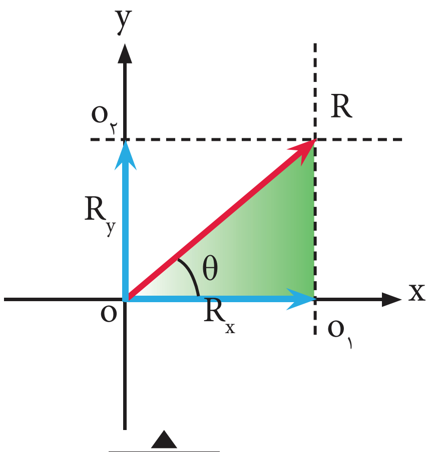
۲-۶ تجزیهٔ یک بردار به مؤلفه‌های متعامد آن در دستگاه مختصات دکارتی

مطابق شکل (۲-۱۷) بردار $\vec{R}$ با زاویه θ نسبت به محور **x** مفروض است. می‌خواهیم آن را روی محورهای متعامد **x** و **y** تجزیه نمائیم. چنان‌چه مطابق مراحل سه‌گانه در بخش (۲-۵) عمل کنیم، به شکل (۲-۱۸) خواهیم رسید.



شکل ۲-۱۶

اندازه یا مقدار مؤلفه‌های R_x و R_y با استفاده از روابط مثلثاتی در مثلث رنگ شدهٔ شکل (۲-۱۸) به شکل زیر محاسبه می‌شوند:



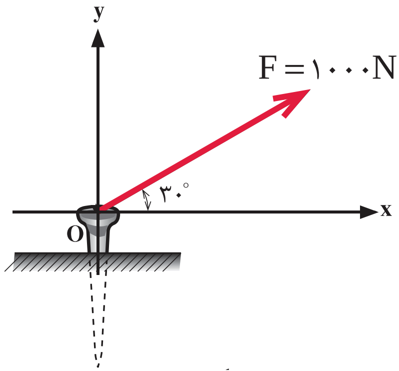
شکل ۲-۱۸

$$\cos\theta = \frac{R_x}{R} \Rightarrow \boxed{R_x = R.\cos\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{R_y}{R} \Rightarrow \boxed{R_y = R.\sin\theta} \qquad (۲-۳)$$

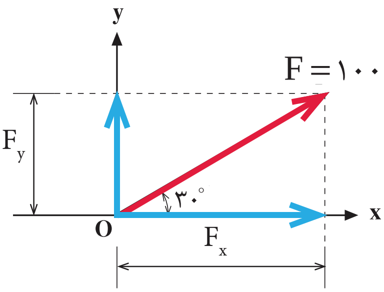
مثال ۳

نیروی F مطابق شکل بر میخی وارد می‌شود. مطلوب‌است تجزیه این نیرو روی محورهای x و y و محاسبه مقادیر مؤلفه‌ها.



حل:

نیروی F را به مؤلفه‌های متعامد تجزیه می کنیم.



$$F_x = F\cos\theta = ۱۰۰۰\times\cos ۳۰^\circ \Rightarrow \boxed{F_x = ۸۶۶/۰۲\ \text{N}}$$

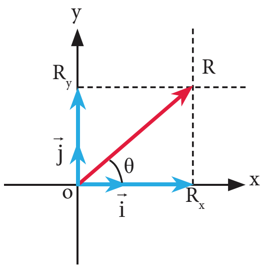
$$F_y = F\sin\theta = ۱۰۰۰\times\sin ۳۰^\circ \Rightarrow \boxed{F_y = ۵۰۰\ \text{N}}$$

۲-۶-۱- نمایش برداری یک بردار در دستگاه مختصات دکارتی

در دستگاه مختصات دکارتی محورهای ox و oy بر یکدیگر عمود بوده و بردارهای واحد (یکه) روی آن‌ها به ترتیب با $\vec{i}$ و $\vec{j}$ نمایش داده می‌شوند و برداری مانند بردار $\vec{R}$ مطابق شکل (۲-۱۹) در این دستگاه با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j}} \qquad (۲-۴)$$

که در رابطهٔ فوق R_x مؤلفهٔ $\vec{R}$ روی محور x و R_y مؤلفهٔ $\vec{R}$ روی محور y می‌باشد.



شکل ۲-۱۹

مثال ۴

فرم برداری بردار F در شکل (مثال ۳) را بنویسید.

حل:

فرم برداری بردار $\vec{F}$ به صورت $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$ می‌باشد.

با توجه به نتایج مثال ۳ داریم:

$$F_x = ۸۶۶/۰۲N$$
$$F_y = ۵۰۰N$$

بنابراین:

$$\boxed{\vec{F} = ۸۶۶/۰۲\vec{i} + ۵۰۰\vec{j}}$$

۲-۷ تعیین اندازهٔ یک بردار با استفاده از مؤلفه‌های متعامد آن

همان‌طور که یک بردار را می‌توان به دو مؤلفه روی امتدادهای مختلف تجزیه کرد می‌توان به کمک مؤلفه‌های یک بردار، اندازهٔ بردار و زاویهٔ آن‌را به کمک رابطهٔ فیثاغورث و نسبت‌های مثلثاتی تعیین کرد.

هر گاه برداری مانند $\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j}$ داشته باشیم، می‌توان اندازه R و زاویه آن‌را با امتداد x به صورت زیر تعیین نمود:

مقدار (اندازه) بردار R

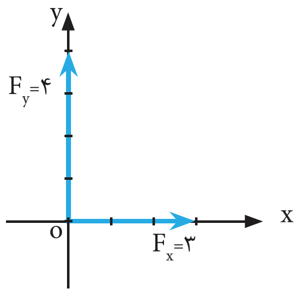
$$R = \sqrt{R_x^۲ + R_y^۲} \qquad (۲-۵)$$

زاویه بردار R نسبت به محور x ها

$$\theta = \tan^{-۱}\left|\frac{R_y}{R_x}\right| \qquad (۲-۶)$$

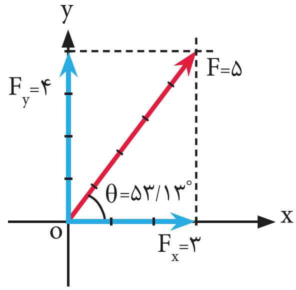
مثال ۵

بردار $\vec{F}=(۳\,\vec{i}+۴\,\vec{j})$ را ترسیم نموده، مقدار و زاویهٔ آن‌را با محور x ها به‌دست آورید.



$$F=\sqrt{F_x^{۲}+F_y^{۲}} \Rightarrow F=\sqrt{۳^{۲}+۴^{۲}} \Rightarrow \boxed{F=۵}$$

$$\theta=\tan^{-۱}\left|\frac{F_y}{F_x}\right| \Rightarrow \theta=\tan^{-۱}\left|\frac{۴}{۳}\right| \Rightarrow \boxed{\theta=۵۳/۱۳^{\circ}}$$



خلاصه فصل

- کمیت‌های فیزیکی به دو دستهٔ کلی تقسیم می‌شوند:

الف- کمیت‌های اسکالر (عددی) ب- کمیت‌های برداری

- بردارهای یکه (واحد) روی محورهای x و y در دستگاه مختصات دکارتی به ترتیب با $\vec{i}$ و $\vec{j}$ نمایش داده می‌شوند.
- جمع و تفریق کمیت‌های برداری با جمع و تفریق کمیت‌های عددی متفاوت می‌باشد.
- جمع و تفریق دو یا چند بردار به صورت ترسیمی با روش‌های مثلث و متوازی‌الاضلاع و چندضلعی، انجام می‌شود.
- هر بردار را می‌توان روی دو محور دلخواه به مؤلفه‌های آن تجزیه نمود.
- مؤلفه‌های متعامد یک بردار در صفحه مختصات دکارتی با روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$R_x=R.\cos\theta$$
$$R_y=R.\sin\theta$$

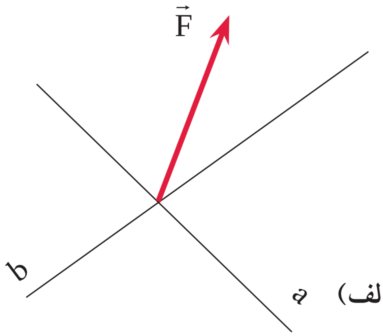
- فرم برداری یک بردار با استفاده از مؤلفه‌های متعامد آن در صفحهٔ مختصات دکارتی عبارت‌است از: $\vec{R}=R_x\vec{i}+R_y\vec{j}$
- برای جمع و تفریق بردارهای هم‌راستا و یا موازی کافی است اندازهٔ آن‌ها را با یکدیگر به صورت جبری جمع و یا تفریق نمود.
- اندازه برداری مانند $\vec{R}=R_x\vec{i}+R_y\vec{j}$ و زاویهٔ آن با محور x ها از روابط زیر تعیین می‌شوند:

اندازه بردار **R** $\quad R=\sqrt{R_x^{۲}+R_y^{۲}}$

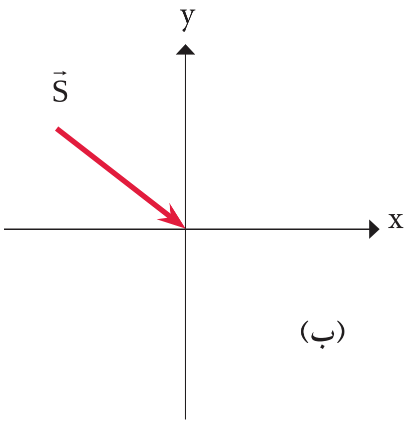
زاویه بردار **R** با محور **x** $\quad \theta=\tan^{-۱}\left|(\frac{R_y}{R_x})\right|$

خودآزمایی

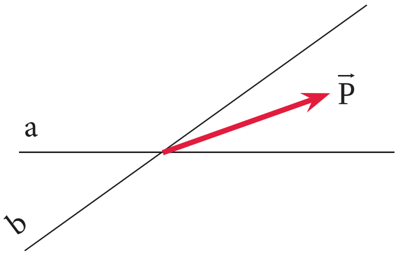
۱- بردارهای زیر را به روش ترسیمی روی محورهای داده شده تجزیه کنید.



(الف)

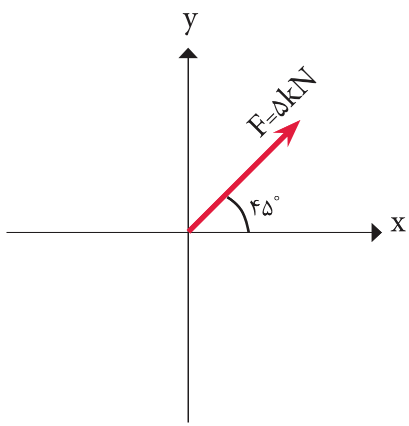


(ب)

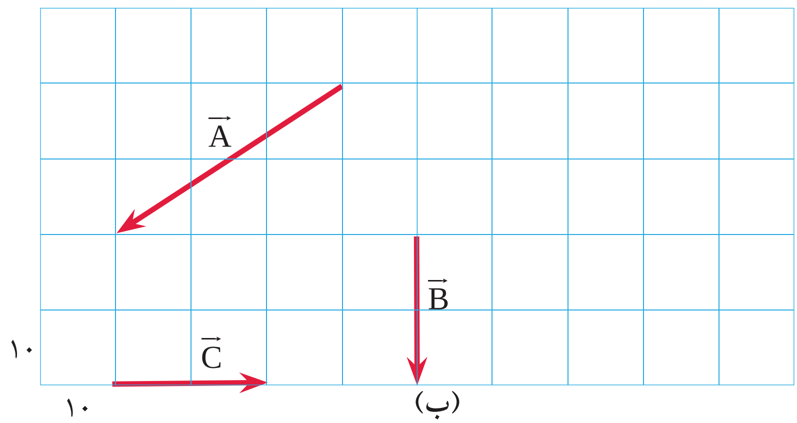


(ج)

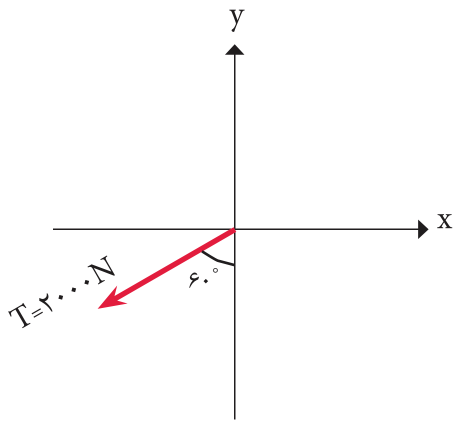
۲- بردارهای زیر را به مؤلفه‌های متعامد آن تجزیه نمائید و فرم برداری آن‌ها را بنویسید.



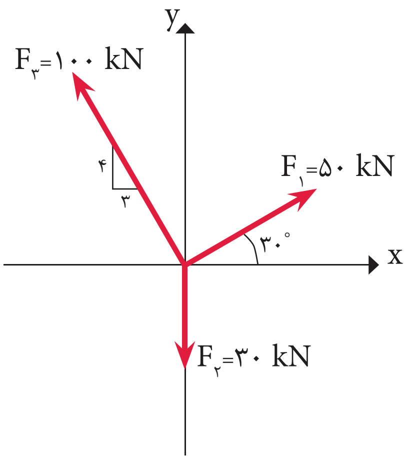
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

۳- بردارهای زیر را ترسیم نموده و اندازه و زاویه هر یک را نسبت به محور x و y تعیین کنید.

الف) $\vec{F} = -۴\vec{i} + ۳\vec{j}$

ب) $\vec{P} = -۵\vec{i}$

ج) $\vec{T} = ۳/۵\vec{j}$

د) $\vec{Q} = -۳\vec{i} - ۳\vec{j}$

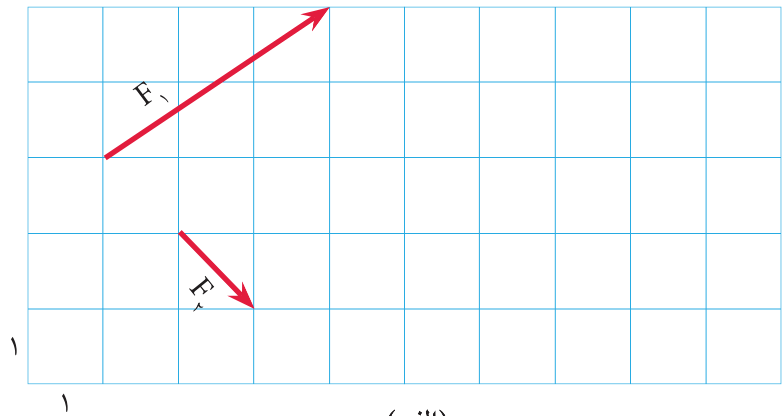
۴- در شکل‌های زیر مطلوب است:

الف) فرم برداری هر بردار.

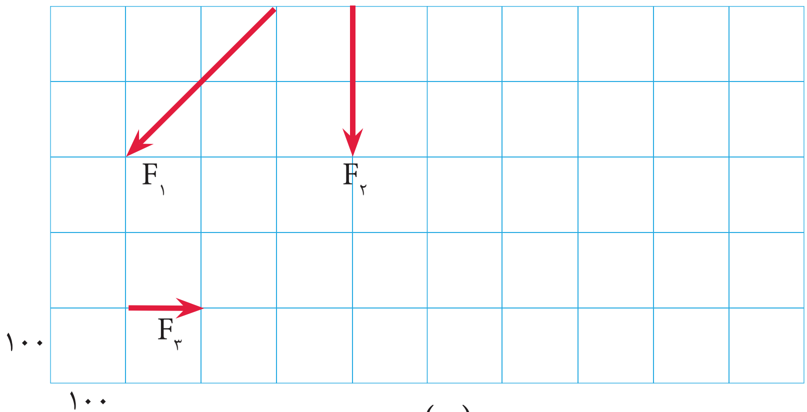
ب) اندازه هر یک را به صورت ترسیمی (با خط کش) به‌دست آورید.

ج) اندازه هر یک را به صورت محاسباتی به‌دست آورید.

د) اندازه‌های محاسباتی و ترسیمی هر بردار را با هم مقایسه کنید.



(الف)



(ب)