تنش: مقدار نیرو در واحد سطح تنش نامیده میشود.

$$\sigma = \frac{F}{A} = \sigma = \frac{P}{A}$$

واحدهای آن با واحدهای فشار یکسان است. برخی از واحدهای متداول برای تنش به شرح زیرند:

$$\frac{Kips}{Ft^2} . \frac{lb}{ft^2} . \underbrace{\frac{lb}{in^2}}_{Psi} . \frac{t}{cm^2} . \frac{kgf}{cm^2} . \frac{N}{mm^2}$$

هر ترکیبی از واحد نیرو و واحد طول می تواند واحدی از تنش باشد.

انواع تنش:

1- محوری ←ناشی از نیروی محوری و به صورت عمود بر سطح.

2- خمشی ← ناشی از لنگر خمشی و به صورت عمود بر سطح.

3- برشی ← ناشی از نیروی برشی ← داخل صفحه.

4- پیچشی ← ناشی از لنگر پیچشی ← داخل صفحه.

این تنشها به دو دسته داخل صفحه و عمود بر صفحه نیز تقسیم می شوند.

- تنش های برشی و پیچشی داخل صفحه هستند و تنش محوری و خمشی عمود بر صفحه می باشند.

تنش نیز همانند نیرو یک کمیت برداریست و به همین جهت، تنش ها نیز طبق قوانین جمع برداری با هم قابل جمع هستند.

اگر دو بردار تنش در یک نقطه هر دو محوری باشند با هم می توان آنها را جمع جبری نمود.(چون راستای بردار آنها با هم موازی است) اما اگر یکی محوری و دیگری داخل صفحه باشد برای جمع آنها باید از روش های جمع برداری استفاده نمود.

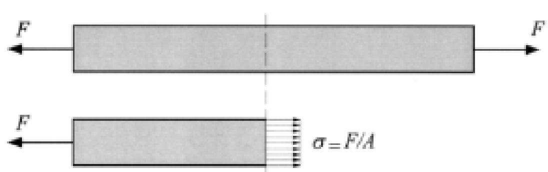
– تنش محوری (تنش قائم) عمود بر صفحه

این تنش ناشی از نیروهای محوری می باشد اگر تنش ناشی از نیروی محوری فشاری باشد تنش فشاری و با علامت منفی. اگر ناشی از نیروی محوری کششی باشد تنش کششی و با علامت مثبت در نظر گرفته می شود.

محاسبه تنش محوری در یک میله تحت نیروی محوری

اگر در یک میله با سطح مقطع A تحت نیروی محوری P (که این نیرو ازمرکز سطح مطع عبور میکند) باشد می توانیم فرض نماییم که این نیرو تنشی یکنواخت در سطح میله ایجاد می کند و در نتیجه مقدار تنش از رابطهٔ زیر قابل محاسبه می باشد.

$$\sigma = \frac{F}{A}$$



باید توجه داشت که توزیع تنش در میله عملاً به طور کامل یکنواخت نیست و قسمت هایی از سطح مقطع میله که به محل اثر بار نزدیک ترند تحت تنش بیشتری می باشند (σ_{max}) که به این مساله اصطلاحاً تمرکز تنش (Stress Concentration) گفته می شود. بر اساس اصل سن و نان با دور شدن از بار متمرکز ، توزیع تنش در مقطع یکنواخت میشود. بحث

تمرکز تنش در جاهایی که تغییر شکل ناگهانی در مقطع بوجود می آید (اطراف سوراخها، مقاطع باریک شده) و .... وجود دارد.

محاسبه تنش در میله وقتی تحت تاثیر چند نیروی محوری در طول خود باشد:

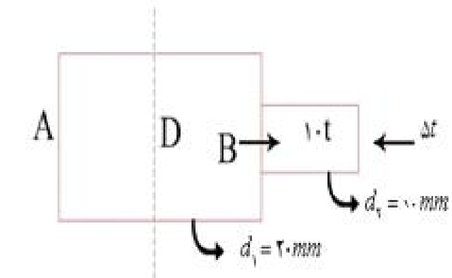
در این حالت مقدار تنش در نقاط مختلف میله متفاوت است. برای محاسبه ی تنش در هر نقطه ی میله در آن نقطه یک مقطع زده و برآیند نیروهای وارد بر آن مقطع را از یکی از دو سمت مقطع محاسبه میکنیم (مجموع نیروهای محوری وارد بر میله از یکی از دو انتها و ترجیحاً از انتهای آزاد میله را تا نقطه مورد نظر با هم جمع جبری میکنیم. از هر یک از دوسمت مقطع اگر این کار را انجام دهیم درست است و مقادیر به دست آمده برای نیروی محوری نباید متفاوت باشد) و به مقدار سطح مقطع میله در آن نقطه تقسیم میکنیم. اگر مقدار سطح مقطع میله نیز در طول میله تغییر کند، این مساله نیز باعث متغیر شدن مقدار تنش در طول میله میشود. در این حالت نیز مقدار تنش در هر نقطه برابر مجموع نیروهای محوری وارد بر میله از یکی از دو انتهای میله تا نقطه مورد نظر تقسیم بر سطح مقطع میله در همان نقطه.

مثال: مطلوب است محاسبه ی تنش محوری در نقطه ی D از میله ی زیر؟

در نقطه ی مورد نظر برش می زنیم و از سمت آزاد آن شروع به

محاسبه می کنیم. در اینجا بار محوری نقطه ای است. برای حل مساله نیز یک سیستم واحد را انتخاب کرده و تا انتهای حل مساله تمام اعداد را بر حسب این سیستم واحد در نظر میگیریم و در صورت نیاز تبدیل واحد را هم انجام میدهیم.

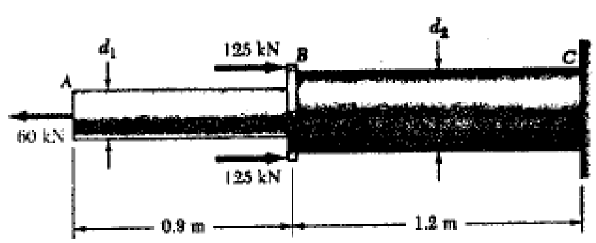
واحد: Kg , mm



$$\sigma_{D+} = \frac{\sum P_i}{A_1} = \frac{-۵۰۰۰+۱۰۰۰۰}{\frac{\pi ۲۰^۲}{۴}} = \frac{+۵۰۰۰}{۳۱۴} = ۱۵/۹۲ \ kgF/mm^۲$$

در بالا در نقطه D مقطع زده و تکه سمت راست آن که به انتهای آزاد میله منتهی میشود را انتخاب میکنیم. نیروی 5 تن اعمال شده در انتهای سمت راست، مقطع میله در نقطه D را تحت فشار و نیروی 10 تن در نقطه B این مقطع را تحت کشش قرار میدهد. نیروی کششی با علامت مثبت و نیروی فشاری با علامت منفی در نظر گرفته شده و با یکدیگر جمع جبری میشوند.

مثال: دو میله استوانه ای شکل AB و BC به یکدیگر در نقطه B متصل شده اند. اگر قطر میله AB برابر با 30 میلیمتر و قطر میله BC برابر با 50 میلیمتر باشد، مطلوبست محاسبه مقدار تنش محوری در هر یک از این دو میله. میله در سمت چپ خود آزاد و از سمت راست خود به تکیه گاه متصل است.



حل:

rod AB $\quad$ Force: $P = 60 \times 10^3$ N tension

Area: $A = \frac{\pi}{4} d_1^2 = \frac{\pi}{4}(30 \times 10^{-3})^2 = 706.86 \times 10^{-6}\ m^2$

Normal stress: $\sigma_{AB} = \frac{P}{A} = \frac{60 \times 10^3}{706.86 \times 10^{-6}} = 84.88 \times 10^6$ Pa

$\sigma_{AB} = 84.9$ MPa ◄

rod BC

Force: $P = 60 \times 10^3 - (2)(125 \times 10^3) = -190 \times 10^3$ N

Area: $A = \frac{\pi}{4} d_2^2 = \frac{\pi}{4}(50 \times 10^{-3})^2 = 1.9635 \times 10^{-3}\ m^2$

Normal stress: $\sigma_{BC} = \frac{P}{A} = \frac{-190 \times 10^3}{1.9635 \times 10^{-3}} = -96.77 \times 10^6$ Pa

$\sigma_{BC} = -96.8$ MPa ◄

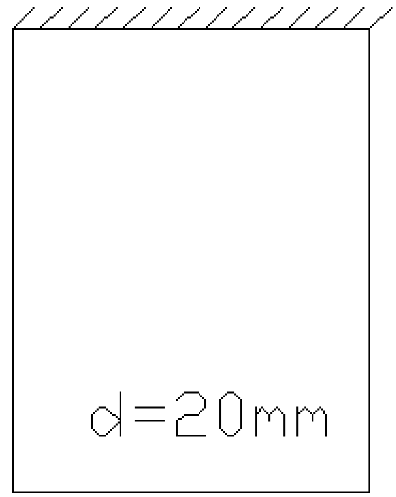
در بالا با توجه به اینکه انتهای آزاد میله در سمت چپ آن قرار گرفته است بهتر است از سمت چپ به راست حرکت نماییم. برای میله AB مقدر نیروی محوری برابر 60 کیلونیوتن و به صورت کششی و برای قطعه BC مقدار نیرو برابر با 190 کیلونیوتن و به صورت فشاری است. بر این اساس تنش در قطعه اول کششی و در قطعه دوم فشاری است.

توجه : واحد نیوتن بر میلیمتر مربع همان مگاپاسکال و نیوتن بر متر مربع برابر پاسکال است.

* اگر به میله بار محوری گسترده اعمال شود برای محاسبه ی تنش محوری در هر مقطع نیازمند انتگرالگیری جهت محاسبه نیروی محوری می باشیم.

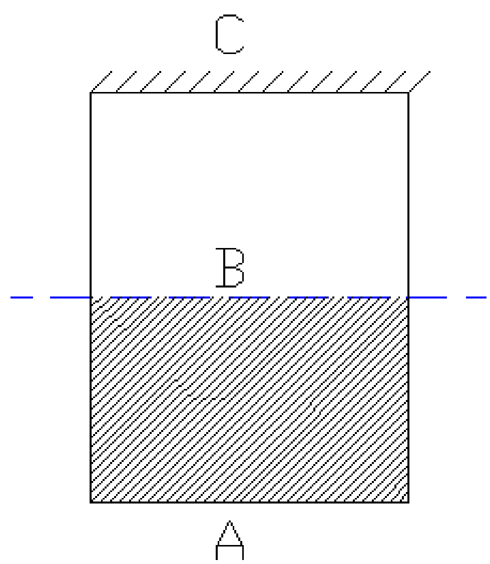
مثال: میله نشان داده شده در شکل زیر تحت اثر نیروی وزن خود آویزان است مطلوب است محاسبه ی تنش محوری در وسط و بالای میله؟ میله به شکل استوانه به قطر 20 میلیمتر، طول یک متر و از جنس فولاد میباشد.

(وزن مخصوص) چگالی فولاد $\gamma = ۷۸۵۰ \, {}^{kgf}\!/_{m^۳}$



حل:

ابتدا در وسط میله یک مقطع میزنیم.



به مقطع وسط میله یک نیروی محوری معادل وزن میله از انتهای میله تا وسط میله (قسمت هاشور خورده میله در شکل بالا) وارد میشود. وزن این قسمت برابر حاصلضرب

حجم نیمه پایینی میله در وزن مخصوص آن میباشد. حجم میله که استوانه ای است برابر مساحت قاعده در ارتفاع مورد نظر میباشد. (حجم استوانه $V=\pi r^2 h$)

واحد: Kg.m

$$W_{AB}=\gamma.V_{AB}=7850\left(\frac{0.5\times\pi\times(0.02)^2}{4}\right)=1.23\,kgf$$

$$\sigma_B=\frac{W_{AB}}{A}=\frac{1.23}{\pi\times\frac{(0.02)^2}{4}}=3917\ kg/m^2$$

حال مقدار تنش در انتهای میله در نقطه C را محاسبه میکنیم. در اینجا نیروی محوری که به مقطع میله وارد میشود شامل وزن تمام میله است.

$$W_B=\gamma.V_B=7850\times\left(\frac{1\times\pi\times(0.02)^2}{4}\right)=2.46\,kgf$$

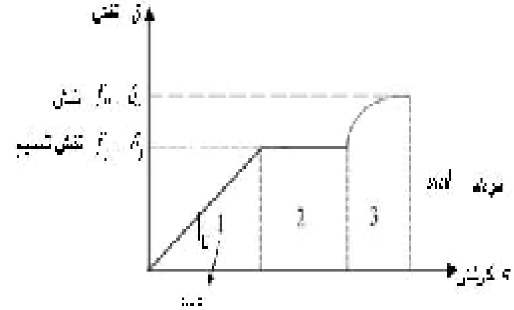
$$\sigma_B=\frac{W_B}{A}=\frac{2.46}{\frac{\pi\times(0.02)^2}{4}}=7834\ kg/m^2$$

کرنش: ε (بدون بعد)

مقدار تغییر شکل ایجاد شده در جسم در اثر نیروی وارد بر آن در واحد طول را کرنش مینامند. میزان تغییر شکل ایجاد شده در اجسام بر اساس جنس آنها متغیر است و بر این اساس می توان برای هر ماده نمودارهای تغییر تنش بر حسب کرنش را ترسیم نمود.

$$\varepsilon=\frac{\Delta\rightarrow \text{تغییر طول}}{L\rightarrow \text{طول اولیه}}=\frac{\sigma}{E}$$

- تغییرات تنش نسبت به کرنش خطی است (در ابتدای وارد شدن نیرو)
- به طور مثال در ادامه نمودار تنش-کرنش برای فولاد نرمه ساختمانی (موسوم به فولاد ST37) ترسیم شده است.



در منحنی بالا 3 ناحیه موجود است.

در قسمت اول منحنی به صورت خطی می باشد و به این ناحیه، ناحیه الاستیک گفته میشود. شیب منحنی در این ناحیه را با حرف E نشان می دهیم.

مدول یانگ (الاستیسیته) (ضریب ارتجاعی) E

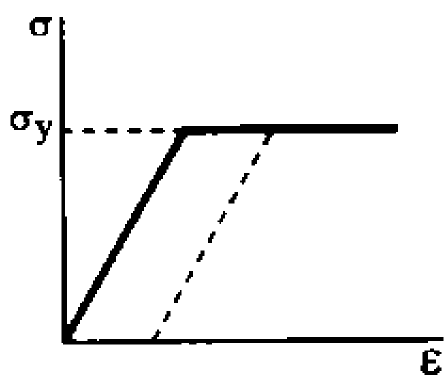
ویژگی ناحیه اول: رابطه تنش و کرنش به صورت خطی است (با افزایش هر کدام از آنها دیگری نیز به صورت خطی اضافه میشود و بالعکس با کاهش یکی از آنها دیگری نیز کاهش می یابد). در این ناحیه اگر پس از بارگذاری اقدام به بار برداری بنماییم، به گونه ای که بار و تنش وارد بر جسم دوباره صفر شود، میزان تنش و کرنش روی همان خط برگشته و به مبدا مختصات می رسد. (پس از باربرداری هیچگونه ای کرنشی در ماده ماندگار نمیشود)

در این ناحیه رابطه بین تنش و کرنش را به شکل زیر که رابطه هوک نامیده می شود میتوان نوشت:

$$\sigma = \varepsilon . E$$

همانطور که اشاره شد در رابطه بالا E مدول الاستیسیته یا مدول یانگ یا مدول ارتجاعی نامیده میشود.

در انتهای ناحیه اول به تنش تسلیم یا تنش جاری شدن میرسیم. از این پس با ورود نمودار به ناحیه دوم دیگر تنش اضافه نمیشود و با افزایش کرنش تنش ثابت میماند و منحنی حالت یک خط مستقیم را خواهد داشت. این ناحیه تحت نام ناحیه ***رفتار پلاستیک*** شناخته میشود. رفتار ماده در این ناحیه همانند یک شکلاتی است که پس از اعمال نیرو و اضافه کردن نیرو به یکباره بدون اضافه کردن نیرو شروع به کش آمدن و طویل شدن مینماید. در ناحیه دوم اگر باربرداری انجام شود، ماده پس از باربرداری دیگر بدون کرنش نخواهد بود و مسیر برگشت دیگر بر روی همان مسیر رفت منحنی نخواهد بود و تنشها بر روی یک خط به موازات قسمت الاستیک منحنی تنش- کرنش به عقب باز میگردد تا محور افقی کرنش را قطع نماید. پس از باربرداری بر این اساس مقداری تغییر شکل و کرنش در جسم ماندگار میشود.

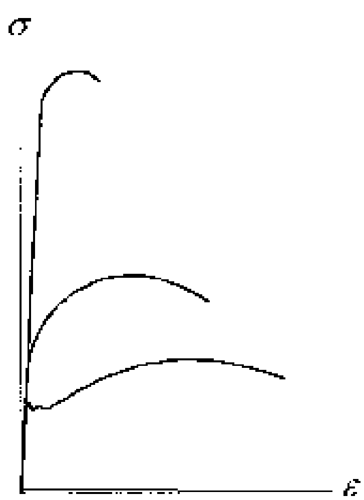


در انتهای ناحیه دوم فولاد دوباره سخت شده و نمودار حالت منحنی میگیرد. در اینجا باز هم با اضافه شدن کرنش تنش نیز اضافه میشود. این نمودار تا آنجا پیش میرود که ماده به تنش و کرنش گسیختگی یا نهایی خود برسد و در انتهای نمودار فولاد دچار پارگی میشود.

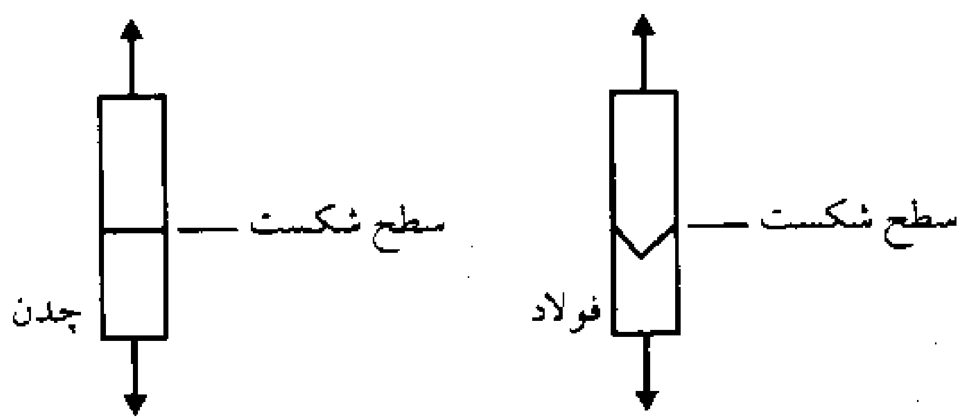
این نمودار برای مواد دیگر ممکن است متفاوت باشد. به طور مثال برخی مواد دارای قسمت خطی نیستند و یا طول قسمت خطی (الاستیک) نمودار در آنها کم است (همانند بتن). یا ممکن است فاقد ناحیه دوم (پلاستیک) باشند (همانند چدن) یا طول ناحیه پلاستیک آنها کمتر از فولاد نرمه در بالا باشد (مانند فولادهای با درصد کربن بالا).

موادی که دارای ناحیه پلاستیک با طول قابل توجه میباشند مواد نرم یا شکلپذیر نامیده میشوند. موادی که فاقد ناحیه دوم بوده و یا طول این ناحیه در آنها کم است مواد ترد نامیده میشوند (مانند چدن).

شکل زیر نیز مقایسه ای بین منحنی تنش-کرنش چند نوع فولاد مختلف میباشد. فولادهایی که نمودار آنها بالاتر قرار گرفته است، آنهایی هستند که کربن بیشتری دارند و در عوض کرنش گسیختگی و ناحیه پلاستیک آنها کمتر است.



نکته: مصالح ترد در کشش ضعیفند و لذا سطح شکست آنها در صفحه ای است نیروی کششی در آن ماکسیمم است. بنابراین اگر یک میله چدنی تحت کشش خالص قرار گیرد، در صفحه ای عمود بر امتداد بار که دارای بیشترین نیروی کششی است میشکند. بر خلاف آنها مواد نرم یا شکلپذیر در حالت کلی در برش ضعیفند و لذا شکست آنها معمولاً در جهتی است که تنش برشی ماکسیمم است. لذا اگر یک میله فولادی تحت تنش کشش قرار گیرد، در صفحه 45 درجه دارای بیشترین برش است میشکند. (برای فولاد تنش تسلیم برشی $\frac{F_y}{\sqrt{3}}$ میباشد که در آن Fy تنش تسلیم در اثر بارهای محوری کششی یا فشاری است.)



نکته مهم: در این درس جز در مواردی که ذکر خواهد شد فرض بر آن است که مصالح دارای عملکرد الاستیک بوده و تنشها از محدوده الاستیک (ناحیه خطی منحنی تنش-کرنش) فراتر نمیروند.

نکته: غیر از تقسیمبندی مواد ترد و شکلپذیر مواد به دو دسته ایزوتروپ و ارتوتروپ هم تقسیم میشوند. مواد ایزوتروپ موادی هستند که خواص مختلف آنها نظیر مقاومت کششی و فشاری در جهات مختلف با هم یکسان است و در صورت

تغییر در زاویه اثر نیرو تغییری در اینگونه خواص ماده حاصل نخواهد شد. (نظیر فولاد). مواد ارتوتروپ هم موادی هستند که خواص مختلف آنها در جهات مختلف با هم یکسان نیست. در این زمینه میتوان پارچه را مثال آورد. پارچه در راستای طولی خود که به تار موسوم است دارای مقاومت بیشتری نسبت به راستای عرضی خود که پود نام دارد است. برخی از سنگهای ورقه ورقه نیز دارای این خاصیت هستند. این سنگها در صورت اعمال نیرو در راستای عرضی خود به موازات صفحه ورقه ها به راحتی شکسته میشوند، اما در راستای دیگر دارای مقاومت خوبی میباشند و به راحتی قابل شکستن نیستند.

یک نوع دسته بندی دیگر هم ، تقسیمبندی مواد به دو دسته همگن و غیرهمگن است. مواد همگن در نقاط مختلف خود دارای خواص مشابهی هستند ، اما مواد غیرهمگن در نقاط مختلف خواص متفاوتی دارند. (فولاد یک مثال برای ماده همگن و بتن یک مثال ماده غیرهمگن است).

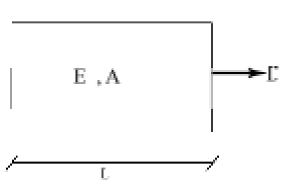
محاسبه تغییر شکل در میله ها تحت اثر بار محوری:

میله با بار محوری و سطح مقطع ثابت:

در حالتی که سطح مقطع میله و جنس میله ثابت بوده و میله تنها تحت اثر یک بار محوری در انتهای خود باشد، مقدار تغییر شکل میله از رابطه زیر و با کمک قانون هوک محاسبه میگردد.

$$\sigma = E.\varepsilon$$

$$\frac{P}{A} = E.\frac{\Delta}{\ell} \Rightarrow \Delta = \frac{P.\ell}{AE}$$



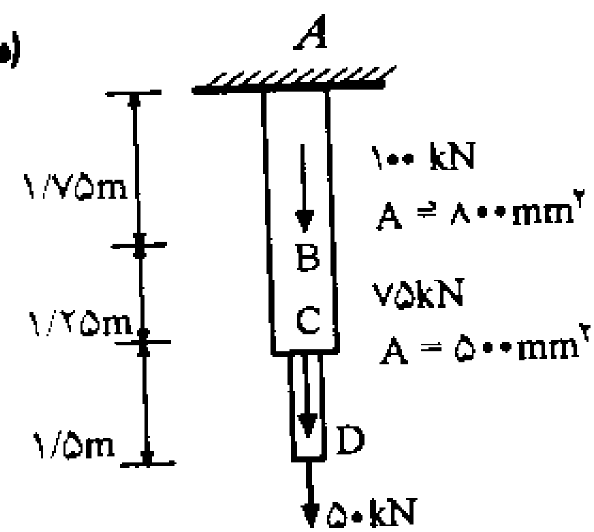
محاسبه تغییر شکل محوری در میله های با سطح مقطع ، بار محوری یا جنس متغیر در طول میله:

اگر یکی از 3 فاکتور بار محوری، سطح مقطع یا جنس میله در طول آن تغییر کند، دیگر از رابطه ی بالا نمی توانیم استفاده کنیم در این حالت میله را به چند بخش کوچکتر تقسیم می کنیم به گونه ای که در هر یک از این بخش های کوچکتر 3 فاکتور فوق ثابت باشد و سپس در هر یک از این بخش ها با استفاده از رابطه ی بالا تغییر شکل را محاسبه میکنیم و در نهایت مقادیر بدست آمده را با هم جمع می کنیم.

$$\Delta = \sum \frac{P_i \times \ell_i}{A_i \times E_i}$$

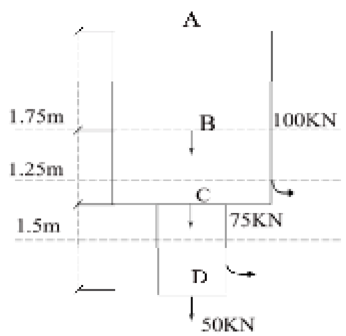
مثال: میله ABCD آلومینیومی است و دارای مدول الاستیسیته E=70 GPa است با صرف نظر کردن از وزن میله تغییر مکان نقطه ی D چند mm است. (هر گیگاپاسکال 1000 نیوتن بر میلیمتر مربع است)

(مهندسی عمران ۷۹)



میله باید به سه تکه BA , CB , DC تقسیم شود.

مقدار تغییر شکل نقطه D برابر مجموع تغییر شکلهای هر یک از تکه های مذکور است.



واحد: N , mm

$$\delta_D = \delta_{DC} + \delta_{CB} + \delta_{BA}$$

$$\delta_{DC} = \frac{50 \times 10^3 \times 1500}{500 \times 7 \times 10^4} = 2.14\ mm$$

$$\delta_{CB} = \frac{125 \times 10^3 \times 1250}{800 \times 7 \times 10^4} = 2.79\ mm$$

$$\delta_{AB} = \frac{225 \times 10^3 \times 1750}{800 \times 7 \times 10^4} = 7.03\ mm$$

$$\delta_D = 2.14 + 2.79 + 7.03 = 11.96\ mm$$

در روابط بالا مقدار نیروی محوری که به هر قطعه اعمال میشود برابر است با مجموع نیروهای محوری وارد بر میله از سمت انتهای میله تا ابتدای آن قطعه. به طور مثال برای تکه CD تنها نیروی 50 کیلونیوتن در نظر گرفته میشود و بقیه نیروها از جمله نیروی 75 کیلونیوتنی که به نقطه C در انتهای این قطعه در نیروی محوری این قطعه به حساب نمی آیند و این نیرو بر قطعات بالاتر از نقطه C اثر میکند.

* مقادیر مثبت تغییر طول نشانگر افزایش طول و مقادیر منفی نشانگر کاهش طول است.

مثال: در مثال قبل مطلوبست محاسبه ی تغییر شکل در نقطه ی C ؟

در این حالت مقدار تغییر مکان نقطه C برابر مجموع تغییر مکان قطعات CB و BA میباشد. (تغییر مکان هر نقطه از میله مجموع تغییر مکان قطعاتی است که بین آن نقطه تا محل تکیه گاه میله قرار میگیرند.)

$$\delta_C = \delta_{CB} + \delta_{BA} = 2.79 + 7.03 = 9.82\, mm$$

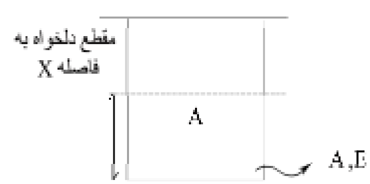
محاسبه ی تغییر شکل میله ها در حالتی که بار محوری به صورت گسترده در طول میله اعمال شود.

در این حالت باید از انتگرال گیری به شرح زیر استفاده نمود:

$$\sigma = \int \frac{P(x)dx}{A(x).E(x)}$$

مثال: مطلوبست محاسبه ی تغییر شکل انتهای میله شکل زیر که در اثر وزن خود آویزان است.

در مقطعی دلخواه از میله به فاصله ی x از پایین میله مقدار بار محوری برابر است با وزن قسمت پایین میله از انتهای آزاد تا مقطع مورد نظر.

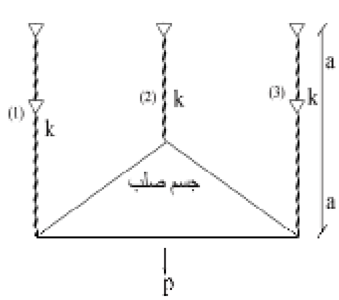


$$P(x) = \gamma(Ax) = (\gamma.Ax)$$

$$\sigma = \int_0^l \frac{\gamma.Ax}{AE}dx = \int_0^l \frac{\gamma.x}{E}dx = \left[\frac{\gamma x^2}{2E}\right]_0^l = \frac{\gamma\ell^2}{2E} - 0 = \frac{\gamma\ell^2}{2E}$$

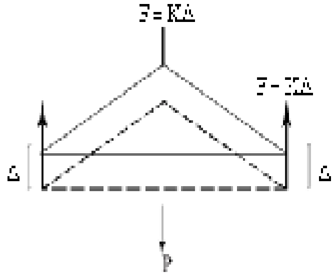
* حدود انتگرال گیری. از نقطه ای است که خیز محاسبه می شود تا تکیه گاه.

مثال: در شکل رو به رو سختی هر سه فنر مساوی است نیروی وارد به هر فنر چه قدر است؟



جسم صلب: جسمی که در آن تغییر شکل داخلی وجود ندارد.

چون شکل متقارن است در اثر اعمال بار جسم به طور مستقیم به سمت پایین حرکت میکند و در آن دورانی ایجاد نمی شود. چون سختی تمام فنر ها با هم برابر است و مقدار تغییر طول آنها نیز یکسان است، پس نیروی ایجاد شده در هر سه فنر نیز یکسان و برابر F میباشد.



$$\sum F_y = 0 \rightarrow 3f - p = 0 \rightarrow F = \frac{P}{3}$$

نیروی هر کدام از فنرها یک سوم نیروی P است.

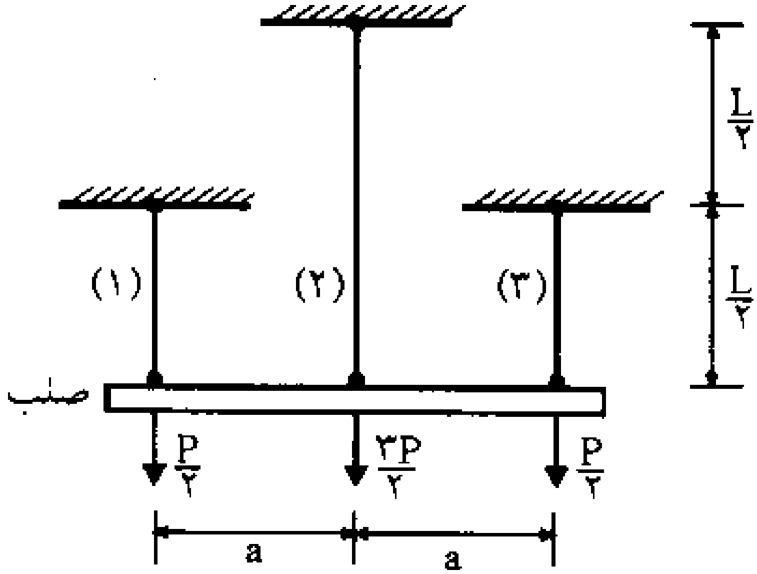
اگر به جای فنرها میله قرار می دادیم، آنگاه:

$$\Delta = \frac{P.\ell}{AE} \Rightarrow P = \left(\frac{AE}{L}\right) \times \Delta \Rightarrow \left(K = \frac{AE}{L}\right)$$

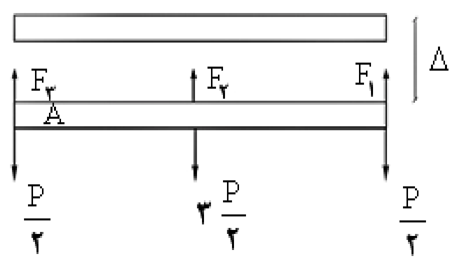
در واقع میله ها نیز خود به نوعی یک فنر با سختی $K = \dfrac{AE}{L}$ میباشند.

مثال: در شکل مقابل میله های 1 و 2 و 3 با جنس و سطح مقطع یکسان تحت تاثیر نیروهای وارده قرار گرفته اند نیروی وارد به هر کدام از میله ها چقدر است؟

(مهندسی عمران ۸۱)



حل: با توجه به تقارن میله صلب افقی در اثر بارهای وارده بدون آنکه دوران نماید به سمت پایین حرکت می کند.



همچنین با توجه به تقارن نیروی دو میله ی اول و آخر با هم یکی است.

$$\sum Fy = 0 \rightarrow 2\,f_1 + f_2 = \left(\frac{P}{2} + \frac{3P}{2} + \frac{P}{2}\right)$$

$$\rightarrow 2\,f_1 + f_2 = \frac{5P}{2} \qquad (1)$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -3\frac{P}{2}.a - \frac{P}{2}.2a + f_2.a + f_1.2a = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-5P}{2}a + f_2.a + f_1.2a = 0 \Rightarrow a(2\,f_1 + f_2) = 5\frac{P}{2}a$$

$$\Rightarrow 2\,f_1 + f_2 = 5\frac{P}{2}$$

میله 1):

$$\Delta = \frac{F_1 \cdot \frac{\ell}{2}}{AE}$$

$$\Rightarrow \frac{F_1 \cdot \frac{\ell}{2}}{AE} = \frac{F_2 \ell}{AE} \Rightarrow F_2 = \frac{F_1}{2} \qquad (2)$$

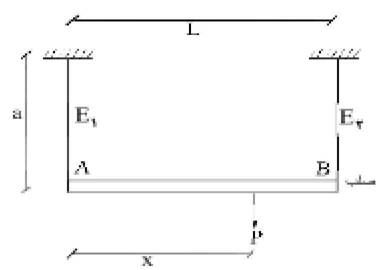
$$\Delta = \frac{F_2 . \ell}{AE}$$

میله 2):

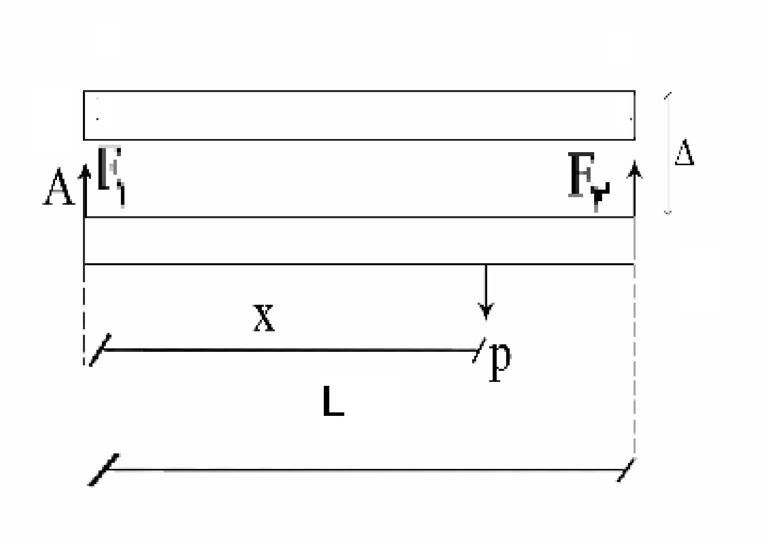
$$(۱),(۲) \quad \rightarrow ۲F_۱ + \frac{F_۱}{۲} = \frac{۵P}{۲} \rightarrow \frac{۵P}{۲} = \frac{۵F_۱}{۲} \rightarrow F_۱ = P \qquad (۳)$$

$$(۳),(۲) \quad \rightarrow F_۲ = \frac{P}{۲}$$

مثال: میله AB توسط دو کابل با طول و مساحت یکسان ولی مدول الاستیسیته متفاوت نگهداری می شود، محل اثر بار P برای آن که میله AB افقی بماند چه قدر است؟



دیاگرم آزاد میله صلب AB را رسم می کنیم:



(میله به طور افقی به سمت پایین تغییر شکل داده است و تمام نقاط آن مقداری مساوی به سمت پایین تغییر شکل داده اند)

$$\uparrow \sum Fy = 0 \rightarrow F_1 + F_2 - P = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 = P \qquad (1)$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow F_2.\ell - P.x = 0 \Rightarrow F_2 = \frac{P.x}{\ell} \qquad (2)$$

از مساوی بودن تغییر مکان دو میله کمک می گیریم.

میله (1) $\Delta = \dfrac{F_1 a}{AE_1}$

$$\Rightarrow \frac{F_1.a}{AE_1} = \frac{F_2.a}{AE_2} \Rightarrow F_1 = F_2 \frac{E_1}{E_2} \qquad (3)$$

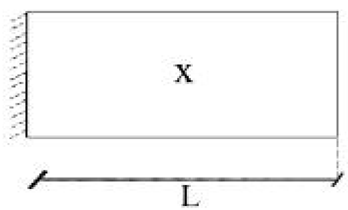
میله (2) $\Delta = \dfrac{F_2.a}{AE_2}$

$$(1),\ (3) \Rightarrow \frac{F_2 E_1}{E_2} + F_2 = P \Rightarrow F_2.\left(1 + \frac{E_1}{E_2}\right) = P \Rightarrow F_2 = \frac{P}{1 + \dfrac{E_1}{E_2}} \qquad (4)$$

$$(4),(2) \Rightarrow \frac{P}{1 + \dfrac{E_1}{E_2}} = \frac{P.x}{1} \Rightarrow x = \frac{L}{1 + \dfrac{E_1}{E_2}} \Rightarrow x = \frac{E_2 \ell}{E_1 + E_2}$$

اثر تغییرات دما بر روی میله ها:

اگر یک میله تحت تغییر تغییر دما قرار گیرد، در صورتی که یک انتهای آن آزاد باشد این تغییر دما در آن تغییر طول ایجاد می کند؛ اما اگر میله در دو انتهای خود دارای تکیه گاه باشد این دو تکیه گاه اجازه تغییر طول به میله را نمی دهند و در نتیجه در تکیه گاه ها نیرو ایجاد شده و به تبع آن در میله نیز تنش حرارتی ایجاد می شود.



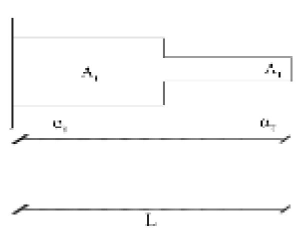
$$\Delta = \ell \alpha \Delta T$$
$$\Delta T = T_2 - T_1$$

α= ضریب انبساط حرارتی

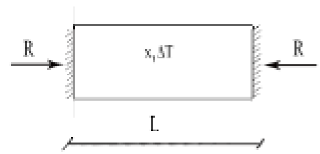
نکته: اگر سطح مقطع میله در طول آن تغییر نماید اما مقدار αثابت باشد، نیازی نیست که میله چند تکه شود و همانند میله با سطح مقطع ثابت تغییر شکل ایجاد می شود و میتوان از همان رابطه بالا جهت محاسبه تغییر شکل استفاده کرد.

اگر مقدار αیا ΔTدر طول میله تغییر کند، میله باید به تکه هایی با مقدار α و ΔT ثابت تقسیم شود و برای هر تکه تغییر شکل حرارتی محاسبه و با هم جمع شود.

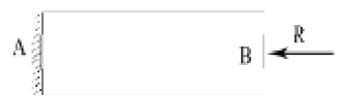
$$\Delta = \sum \ell_i . \alpha_i . \Delta T_i$$



محاسبه تنش حرارتی در میله ای با دو انتهای بسته تحت اثر تغییر دما:



یکی از دو تکیه گاه را آزاد کرده و به جای آن واکنش آن تکیه گاه را قرار می دهیم. همچنین از صفر بودن تغییر مکان نقطه B (با توجه به اینکه متصل به تکیه گاه است) کمک می گیریم.



تغییر مکان B ناشی از مجموع تغییر مکان های حاصل از نیروی R و تغییر دمای میله به میزان ΔT است که این دو باید همدیگر را خنثی کنند:

$$\delta_{AB} = 0$$

$$\delta_{AB} = L\alpha.\Delta T - \frac{R.\ell}{AE} = 0$$

$$\rightarrow R = AE.\alpha.\Delta T$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{R}{A} = \frac{AE.\alpha.\Delta T}{A} \Rightarrow E.\alpha.\Delta T$$

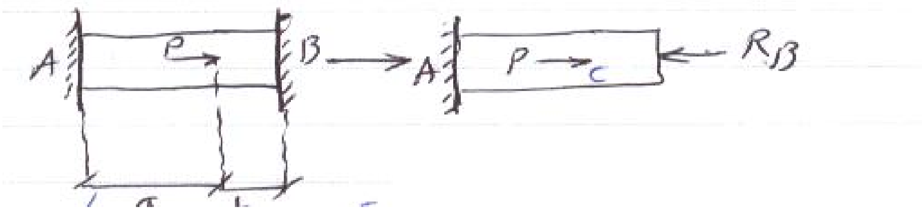
مقدار به دست آمده از رابطه بالا تنش درمیله های نامعین با مقطع و جنس ثابت در اثر تغییر دما میباشد.

محاسبهٔ واکنشهای تکیه گاهی در میله های نامعین:

در حالتی که دو انتهای میله بسته باشد و تکیه گاه داشته باشیم میله نا معین مـی باشـد و محاسبهٔ واکنشهای تکیه گاهی میله بـا اسـتفاده از معـادلات تعـادل اسـتاتیکی امکـان پـذیر

نیست. در این حالت نیز مشابه حالت محاسبهٔ تنشهای حرارتی به شرح زیر عمل مـی کنـیم

.



b a

یکی از دو انتهای میله آزاد و به جای آن واکـنش مجهـول آن را قـرار مـی دهـیم . سـپس تغییر شکل تکیه گاه حذف شده را محاسبه و برابر صفر قرار می دهیم .

معادله سازگاری $\Delta B = 0$

از معادله ای که به این روش بدست می آید مقدار واکـنش مجهـول تکیـه گـاه حـذف شـده محاسبه میگردد.

$$\Delta_B = \Delta_{BC} + \Delta_{CA} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_{BC} = -\dfrac{R_B.b}{AE} \\ \Delta_{CA} = \dfrac{(P - R_B).a}{AE} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-R_B.b}{AE} + \frac{(P - R_B)a}{AE} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(P - R_B).a}{AE} = \frac{R_B.b}{AE}$$

$$\Rightarrow (P - R_B).a = R_B.b$$

$$\Rightarrow P.a = R_B(a + b) \Rightarrow R_B = \frac{P.a}{a + b}$$

با محاسبهٔ واکنش تکیه گاه حذف شده، تعداد مجهولات بـه یـک کـاهش مـی یابـد. حـال بـا ترسیم دیاگرام آزاد میله و نوشتن معادلـهٔ اسـتاتیکی واکـنش تکیـه گـاه دیگـر نیـز بدسـت می آید.

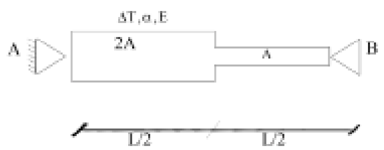
$$R_A \leftarrow \boxed{P \rightarrow} \leftarrow \frac{P.a}{a+b}$$

$$\Sigma_{FX} = 0 \Rightarrow -R_A + P - \frac{Pa}{a+b} = 0$$

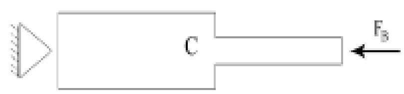
$$\Rightarrow R_A = P\left(1 - \frac{a}{a+b}\right)$$

$$\text{A واکنش تکیه گاه} \Rightarrow R_A = P\left(\frac{a+b-a}{a+b}\right) = \frac{p.b}{a+b}$$

مثال: در میله شکل زیر که تحت اثر تغییر دمای ΔT می باشد مطلوبست محاسبه ی تنش ماکسیمم.



تکیه گاه B را آزاد می‌کنیم



معادله سازگاری $\Delta B = ۰$

$$\Delta_B = \Delta_{BC} + \Delta_{CA} + \Delta_t = ۰$$

تغییر شکل ناشی از تغییر دما

$$\Delta_{BC} = \frac{-R_B . L/2}{AE} + \frac{-R_B . \ell/2}{2AE} + \ell.\alpha.\Delta T = 0 \rightarrow -\frac{3R_B\ell}{4AE} + \ell.\alpha.\Delta T = 0$$

R_B واکنش

$$\rightarrow R_B = \frac{4}{3} AE.\alpha.\Delta T$$

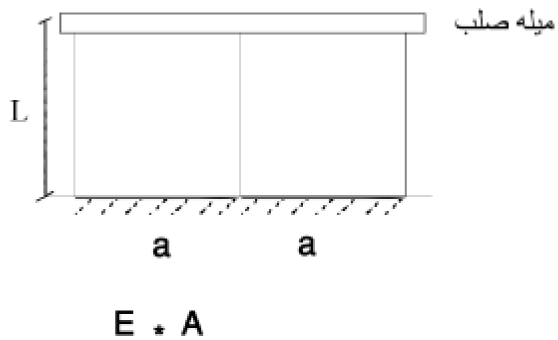
* مطابق رابطه به دست آمده در بالا اگر سطح مقطع تغییر کند نیروی تکیه گاهی نیز عوض می شود.

چون در میله نیرو ثابت است تنش در جایی ماکسیمم است که سطح مقطع حداقل باشد.

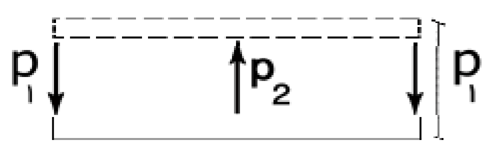
در این جا تنش ماکسیمم در تکه سمت راست میله رخ می دهد.

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} = \frac{R_B}{A} = \frac{\frac{4}{3}E.A\alpha.\Delta T}{A} = \frac{4}{3}E.\alpha.\Delta T$$ تنش ماکسیمم

مثال: صفحه صلبی بر سه میله با شرایط یکسان و مطابق شکل اتکا دارد چنانچه میله وسطی به اندازه ΔT گرم شود ، تنش در میله های کناری چه قدر است؟



با توجه به تقارن شکل ، صفحه صلب پس از تغییر شکل افقی باقی می ماند. همچنین با توجه به تقارن، نیرو در دو میله کناری یکسان است.



میله وسط میخواهد افزایش طول دهد و به همین جهت نیرویی رو به بالا به صفحه صلب وارد میکند. چون دو میله کناری دچار تغییر دما نشده اند، در برابر این تغییر طول مقاومت کرده و نیرویی مخالف میله وسط در آن دو ایجاد میشود که به این جهت این دو میله صفحه را به سمت پایین میکشند.

$$\sum fy = 0 \Rightarrow P_2 - 2P_1 = 0 \Rightarrow P_2 = 2P_1$$

از تساوی تغییر شکل در سه میله کمک می گیریم.

میله‌های کناری $\Delta = \dfrac{P_1 \ell}{AE}$

$$\Rightarrow \frac{P_1 \ell}{AE} = \frac{-P_2 \ell}{AE} + \ell.\alpha.\Delta T$$

میله وسطی $\Delta = \dfrac{-P_2 \ell}{AE} + \ell.\alpha.\Delta T$

$$\Rightarrow \frac{(P_1 + P_2)\ell}{AE} = \ell.\alpha.\Delta T$$

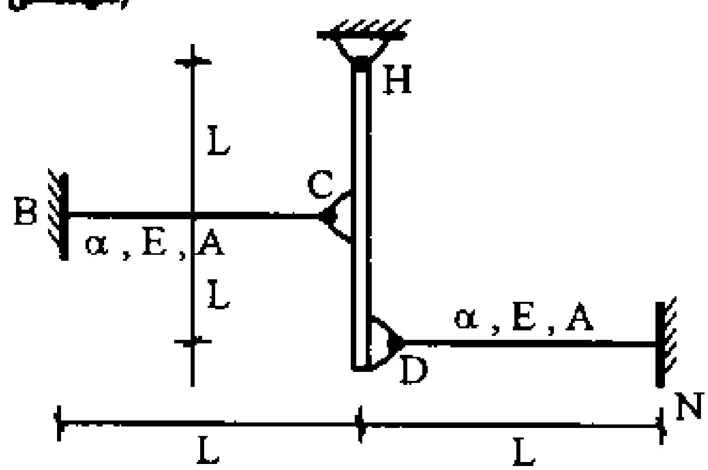
$$P_1 + P_2 = P_1 + 2P_1 = 3P_1 = AE.\alpha.\Delta T \Rightarrow F_1 = \frac{AE.\alpha.\Delta T}{3}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{P}{A} = \frac{P_1}{A} = \frac{E.A\alpha.\Delta T}{3A} = \frac{E.\alpha.\Delta T}{3}$$

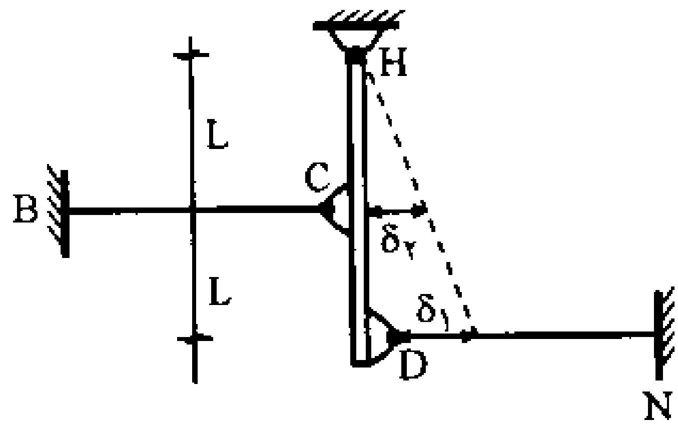
نیروهای ترسیم شده در بالا نیروهایی است که میله ها به صفحه وارد می کنند نیروی وارد از طرف صفحه به میله ها بر عکس نیروهای ترسیم شده می باشد و بر این اساس دو میله کناری تحت کشش و میله ی وسطی تحت فشار است.

مثال: در شکل مقابل میله صلب HD توسط میله های مشابه BC , DN نگهداری شده است. اگر درجه حرارت میله BC به اندازه ΔT افزایش یابد عکس العمل تکیه گاه H چه قدر است؟

(مهندسی عمران ۸۰)



حل: چون میله BC تحت گرما قرار می گیرد تمایل دارد که میله صلب HD را به سمت راست حرکت دهد که میله HD در برابر آن مقاومت می کند و در نتیجه میله BC تحت فشار قرار می گیرد. در اثر تغییر دمای ایجاد شده در BC میلهHD به صورت پادساعتگرد دوران می‌کند و نقطه D به سمت راست می رود.و در نتیجه میله DN تحت فشار قرار می گیرد.



طبق تشابه مقدار تغییر شکل میله BC نصف تغییر شکل میله DN خواهد بود.

$$\delta_2 = \frac{\delta_1}{2}$$

همچنین اگر نیروی میله DN را F1 ونیروی میله BC را F2 فرض نماییم (که F1 به سمت چپ و F2 به سمت چپ است) خواهیم داشت:

$$\sum M_H = 0 \rightarrow -F_1 \times 2\ell + F_2 \times \ell = 0 \rightarrow F_2 = 2F_1$$

حال برای میله DN خواهیم داشت:

$$-\delta_1 = \frac{-F_1\ell}{AE} \Rightarrow \delta_1 = \frac{F_1\ell}{AE}$$

چون میله DN کاهش طول داده است تغییر طول آن باید با علامت منفی وارد شود.

برای میله BC نیز خواهیم داشت:

$$\text{BC میله}: \delta_2 = +\frac{\delta_1}{2} = +\ell.\alpha.\Delta T - \frac{F_2 L}{AE} = +\ell.\alpha.\Delta T - \frac{2F_1 L}{AE}$$

$$\Rightarrow \delta_1 = +2\ell.\alpha.\Delta T - \frac{4F_1 L}{AE}$$

در میله BC تغییر دما تمایل به افزایش طول آن دارد و نیروی F_1 که فشار است تمایل به کاهش طول میله دارد؛ پس تغییر شکل ناشی از تغییر دما با علامت مثبت و تغییر شکل ناشی از نیروی میله با علامت منفی وارد میشود. همچنین چون تغییر طول این میله به صورت افزایش طول است با علامت مثبت وارد میشود.

$$\Rightarrow +2\ell.\alpha.\Delta T - \frac{4F_1 L}{AE} = \frac{F_1 \ell}{AE}$$

$$\Rightarrow +2\ell.\alpha.\Delta T = \frac{5F_1 L}{AE}$$

$$\Rightarrow F_1 = \frac{2}{5} AE\alpha.\Delta T$$

$$\Rightarrow F_2 = 2F_1 = \frac{4}{5} AE\alpha.\Delta T$$

حال با به دست آمدن نیرو در دو میله میتوان واکنش تکیه گاه H را نیز به دست آورد. اگر فرض کنیم که مقدار واکنش افقی تکیه گاه H برابر Hx باشد، با نوشتن رابطه تعادل در راستای افقی خواهیم داشت:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow H_x + F_2 - F_1 = 0 \rightarrow H_x + 2F_1 - F_1 = 0$$

$$\rightarrow H_x = -F_1 \rightarrow H_x = \frac{-2}{5} AE\alpha.\Delta T$$

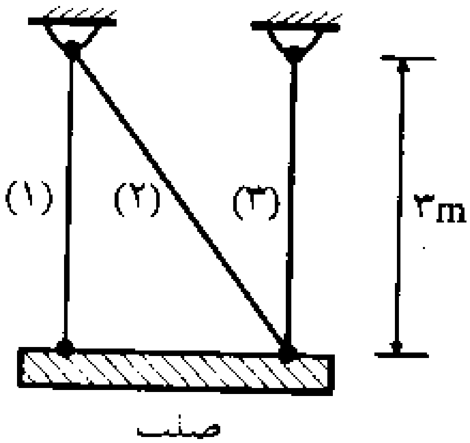
با توجه به منفی بودن نتیجه مقدار نیروی به دست آمده برای واکنش تکیه گاه H به سمت چپ خواهد بود. (توجه گردد که دو نیروی F1 و F2 خلاف جهت هم میباشند).

مثال: تنش در میله های شکل رو به رو به شرح زیر است:

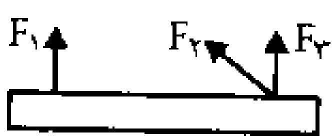
$$\sigma_2 = 0, \sigma_1 = \sigma_3 = 100MPa$$

درجه حرارت سه میله 20 درجه سانتیگراد افزایش می یابد ، تنش در هر میله بر حسب مگاپاسکال چقدر است؟

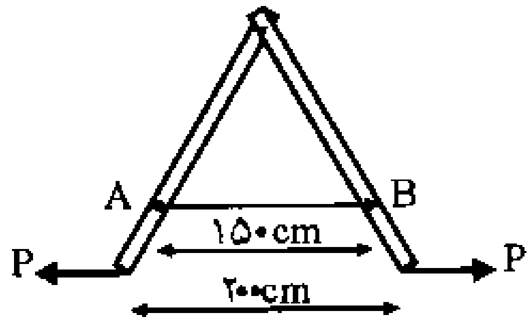
$$\alpha = 11\times10^{-6}, E = 2\times10^{5}\, MPa$$



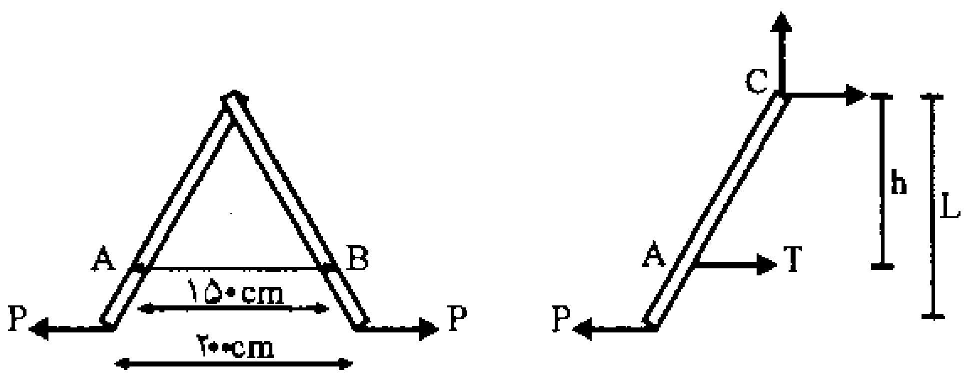
حل: از بین سه میله ، میله شماره یک میتواند بدون مزاحمت تغییر شکل دهد و در نتیجه تنش حرارتی در آن ایجاد نمیگردد و تنش در میله همان تنش 100 مگابایت قبلی است. از طرف دیگر مطابق شکل زیر برای آنکه رابطه تعادل در راستای افقی برقرار باشد، لازم است که تنش در میله 2 نیز صفر باشد. وقتی که این میله بدون تنش و نیرو باشد عملاً قابل حذف است. در نتیجه میله 3 نیز مزاحمتی برای تغییر شکل نخواهد داشت و این میله نیز فاقد تنش حرارتی خواهد بود و تنش در آن همان 100 مگاپاسکال خواهد بود.



مثال: سطح مقطع کابل AB ، 1.50 سانتیمتر مربع و مدول الاستیسیته آن $10\times10^{4}\, kg/cm^{2}$ میباشد. چنانچه تغییر طول آن میلیمتر باشد، نیروی P چقدر است؟



حل: دیاگرام آزاد میله سمت چپ را رسم میکنیم. با نوشتن معادله تعادل لنگر حول نقطه C مقدار نیرو در کابل AB بر حسب نیروی P محاسبه میشود.



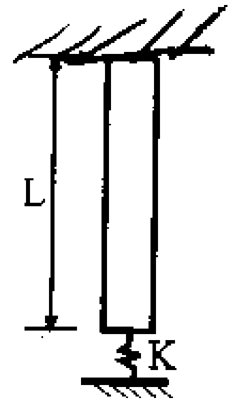
$$\sum M_C = 0 \Rightarrow T.h - P.L = 0$$
$$\frac{h}{L} = \frac{150}{200} = 0.75$$
$$\Rightarrow T \times 0.75L - P.L = 0 \Rightarrow T = 1.33P$$

حال با توجه به موجود بودن تغییر شکل در کابل AB نیرو در این کابل و بر اساس آن نیروی P محاسبه میشود.

$$\delta = \frac{P.L}{AE} \Rightarrow 0.2cm = \frac{1.33P \times 150}{1.5 \times 10 \times 10^4}$$
$$\Rightarrow P = 150kg$$

میله ای تحت اثر وزن خود بر روی فنری به سختی $\frac{2E.A}{L}$ قرار دارد. اگر سختی محوری میله E.A و وزن آن W باشد ، مقدار فشردگی فنر چقدر است؟

(مهندسی عمران ۷۸)

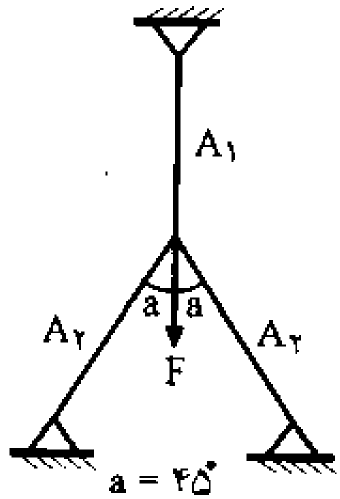


حل: یک تغییر شکل به مقدار δ فرض میکنیم که در فنر و میله ایجاد شده است. بر این اساس نیروی ایجاد شده در فنر به مقدار حاصلضرب سختی فنر در این تغییر شکل به دست می آید. حال بر اساس این نیروی فنر و همچنین وزن میله دوباره مقدار تغییر شکل میله را محاسبه کرده و با مقدار δ مساوی قرار میدهیم. در این فرآیند مقدار δ محاسبه خواهد شد. باید توجه کرد که چون بخشی از بار وارد بر میله وزن آن است که بار گسترده است برای محاسبه تغییر شکل میله ناشی از این بار گسترده مجبور به استفاده از انتگرالگیری هستیم. برای محاسبه تغییر شکل ناشی از وزن میله به فاصله x از انتهای میله یک مقطع میزنیم. بار وارد بر آن مقطع از میله برابر وزن تکه آویزان میله در قسمت پایین مقطع خواهد بود که برابر $\frac{Wx}{L}$ خواهد بود. به این نکته هم توجه گردد که نیروی فنر به صورت فشاری و وزن میله به صورت کششی به میله اعمال میشود.

$$\delta = -\frac{k\delta.L}{AE} + \int_0^L \frac{w(x)}{AE}\,dx = -\frac{2E.A}{L}.\delta + \int_0^L \frac{\frac{Wx}{L}}{AE}\,dx = \frac{-\frac{2E.A}{L}.\delta.L}{AE} + \left[\frac{W.x^2}{2L.AE}\right]_0^L$$

$$\Rightarrow \delta = -2\delta + \frac{W.L}{2AE} \Rightarrow 3\delta = \frac{W.L}{2AE} \Rightarrow \delta = \frac{W.L}{6AE}$$

مثال: سه میله نشان داده شده دارای سطح مقطع A_1 و A_2 مطابق شکل میباشند. جنس هر سه میله یکی است. در صورتیکه نیروی داخلی و طول هر سه میله یکسان باشد، نسبت $\frac{A_2}{A_1}$ چقدر خواهد بود؟



حل: با توجه به تقارن موجود در شکل و بارگذاری در اثر بار وارده نقطه تلاقی سه میله به صورت عمودی بدون جابه جایی جانبی به سمت پایین حرکت خواهد کرد و میله عمودی مستقیماً به سمت پایین حرکت میکند. با توجه به تقارن همچنین میتوان گفت که تغییر شکل دو میله مایل نیز با هم برابر است. این تغییر شکل در دو میله مایل در واقع تصویر تغییر شکل میله عمودی بر راستای این دو میله است (تغییر شکل دو میله مایل کمتر از میله عمودی است).

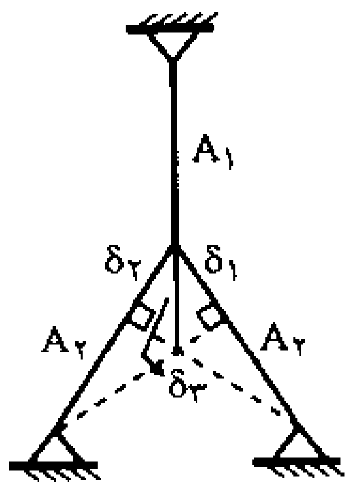
$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 . \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta_3$$

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{F.L}{A_2.E}$$

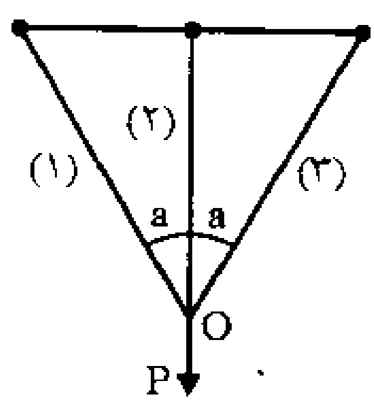
$$\delta_3 = \frac{F.L}{A_1.E}$$

$$\Rightarrow \delta_1 = \delta_2 = \frac{F.L}{A_2.E} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{F.L}{A_1.E}$$

$$\Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = \sqrt{2}$$



مثال: در شکل رو به رو جنس میله ها یکی است و $A_1 < A_2 < A_3$. زیر اثر نیروی قائم P حرکت نقطه O در چه جهتی است؟



حل: نیروی سه میله 1 و و 3 را به ترتیب برابر F1 و F2 و F3 فرض میکنیم. با نوشتن معادله تعادل در راستای افقی خواهیم داشت:

$$F_1 \sin a = F_3 \sin a \Rightarrow F_1 = F_3$$

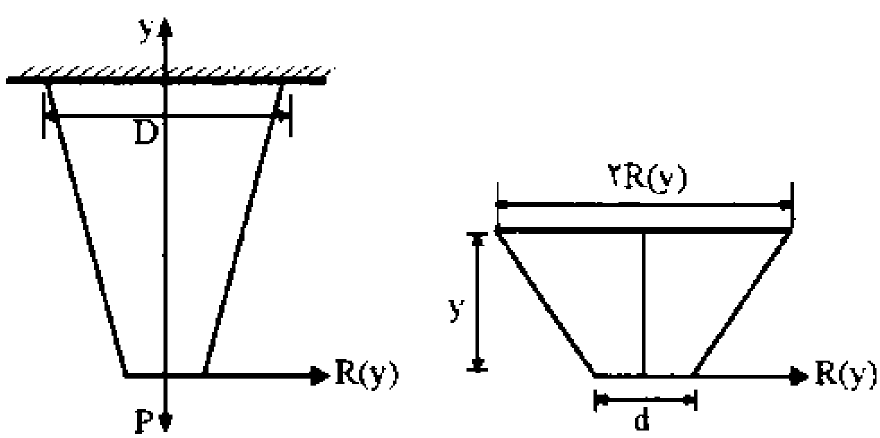
حال مقدار تغییر شکل هر یک از دو میله مایل را محاسبه میکنیم

$$\Delta_1 = \frac{F_1.L}{A_1 E}$$
$$\Delta_3 = \frac{F_3.L}{A_3 E} = \frac{F_1.L}{A_3 E}$$
$$\frac{\Delta_1}{\Delta_3} = \frac{A_3}{A_1} > 1 \Rightarrow \Delta_1 > \Delta_3$$

چون تغییر شکل میله 1 بیش از میله 3 است ، پس تغییر شکل نقطه o باید به سمت راست باشد تا این امر امکانپذیر شود

مثال: تعییر طول یک میله به طول L ، قطر ابتدای آن D ، قطر انتهای دیگر آن d که تحت یک نیروی محوری P قرار گرفته است چقدر است؟

حل: چون مقطع میله متغیر است، باید از روش انتگرالگیری کمک بگیریم. به فاصله Y از انتهای میله یک مقطع میزنیم.



$$\delta = \int_0^L \frac{P.dy}{A(y).E} = \int_0^L \frac{P.dy}{\pi.R^2(y).E}$$

$$2R(y) = d + (D-d)\frac{y}{L}$$

$$R(y) = \frac{1}{2}(d + (D-d)\frac{y}{L})$$

$$\delta = \int_0^L \frac{P.dy}{\pi.[\frac{1}{2}(d + (D-d)\frac{y}{L})]^2.E}$$

$$\delta = \frac{4P}{\pi.E}\int_0^L \frac{dy}{(d + (D-d)\frac{y}{L})^2} = \frac{4P}{\pi.E}\left[\frac{-L}{(D-d).(d + (D-d)\frac{y}{L})}\right]_0^L$$

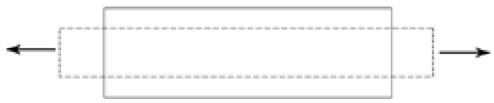
$$\delta = \frac{4P.L}{\pi.E.(D-d)}[\frac{-1}{D} + \frac{1}{d}] = \frac{4P.L}{\pi.E.(D-d)}[\frac{D-d}{D.d}] = \frac{4P.L}{\pi.E.D.d}$$

ضریب پواسون: (ν)

وقتی که یک جسم در یک راستای خاص (مثلاً X) تحت یک نیرو قرار میگیرد، این نیرو با عث تغییر طول جسم در این راستا میشود. اما علاوه بر این راستا معمولاً در راستای جانبی نیز این تغییر بعد ایجاد میگردد. مقدار نسبت کرنش ایجاد شده در راستای جانبی به کرنش ایجاد شده در راستای طولی (همراستا با جهت نیرو) ضربدر منفی یک ، با ضریبی به نام ضریب پواسون نمایش داده میشود. این مقدار به صورت تئوریک بین منهای یک تا مثبت نیم متغیر است؛ اما عملاً محدوده تغییرات ضریب پواسون در محدوده 0 تا 0.5 میباشد. (معمولاً وقتی نیروی محوری کششی باشد، در راستای طولی افزایش بعد و در راستای جانبی کاهش بعد را داریم و بالعکس). اگر مقدار ضریب پواسون برای یک ماده برابر صفر باشد، مفهوم آن اینست که در اثر اعمال بار در راستای جانبی هیچ کرنشی در ماده ایجاد نمیگردد. اگر مقدار این ضریب برابر 0.5 باشد، مفهوم آن اینست که در اثر اعمال بار مقدار تغییر حجم ایجاد شده در ماده در اثر کرنش راستای محوری با مقدار تغییر حجم در راستای مخالف آن در اثر کرنشهای جانبی خنثی شده و عملاً حجم ماده همیشه در اثر اعمال بار مقداری ثابت است. حالت اول (ضریب پواسون برابر عدد 0.5) به طور مثال وقتی پیش می آید که یک ماده در داخل یک ظرف با جداره های صلب قرار گرفته باشد و در این حالت تحت فشار قرار گیرد که جداره ها جلوی تغییر بعد جانبی آن را خواهد گرفت. در این زمینه میتوان به چوب پنبه به عنوان یک ماده با ضریب پواسون تقریباً برابر صفر نیز اشاره نمود. ضریب پواسون نیم هم در مورد مواد تراکم ناپذیر نظیر آب، لاستیک یا اجسام صلب رخ میدهد.

$$\text{ضریب پواسون} = -\frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش محوری}}$$

$-1 \le \nu \le 0.5$ بصورت تئوریک –



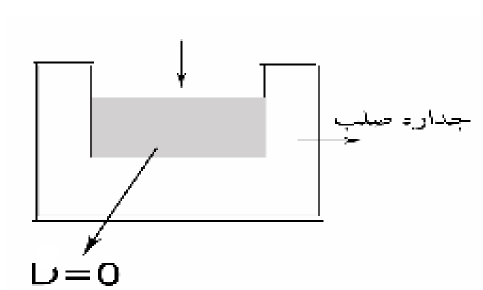
عملاً $0 \le \nu \le 0.5$

لاستیک چوب پنبه

*مواد غیر قابل تراکم: یعنی با هر گونه بار گذاری حجم ثابت است.

*ضریب پواسون منفی بدین معنی است که در اثر نیروی کششی در راستای جانبی بعد جسم افزایش می یابد و در اثر نیروی فشاری بعد جسم در راستای جانبی کاهش می یابد عملاً چنین حالتی به ندرت رخ می دهد. به این جهت ضریب پواسون در محدوده ی صفر و نیم در نظر گرفته می شود.

*ضریب پواسون صفر نشان دهنده آن است که در اثر اعمال بار محوری کرنش جانبی ایجاد نمی شود.



تعمیم قانون هوک:

در قسمتهای قبل به قانون هوک اشاره شده بود. مطابق قاون هوک داشتیم:

$$\sigma = E.\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

این رابطه با این فرض بود که مقدار ضریب پواسون صفر باشد.

فرض $\nu = 0$

در حالتیکه ضریب پواسون صفر نباشد، قانون هوک برای محاسبه کرنشها در راستاهای مختلف به شکل روابط زیر در خواهد آمد:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]$$

انبساط حجمی:

مقدار نسبت تغییر حجم یک ماده به حجم اولیه آن ضریب انبساط حجمی یا کرنش حجمی آن ماده نامیده میشود و با e نمایش داده میشود و مقدار آن از روابط زیر قابل محاسبه است:

$$e = \frac{\Delta V}{V}$$

$$e = \frac{(1-2\nu)}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)$$

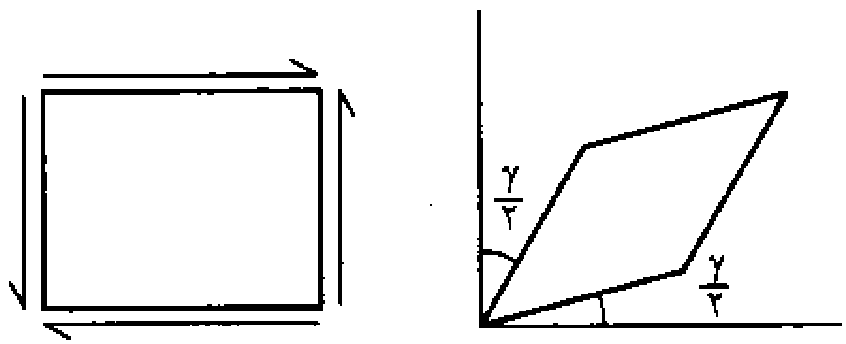
*در مواد تراکم ناپذیر مقدار کرنش حجمی همیشه برابر صفر است. چون تغییر حجم به ازای نیروهای وارده ندارند.

مواد تراکم ناپذیر: $e = 0$

کرنش برشی:

المانی را همانند شکل تحت اثر نیروهای برشی در نظر بگیرید.

در اثر اعمال این نیروهای برشی زوایای اضلاع با یکدیگر تغییر می کند و المان به شکل متوازی الاضلاع در می آید.



میزان تغییر زاویه ایجاد شده در هر یک از رئوس کرنش برشی نامیده می شود.

تنش برشی و کرنش برشی نیز دارای رابطه ی زیر با هم می باشند:

تنش برشی $\leftarrow \ell = G.\gamma$

مدول برشی   کرنش برشی

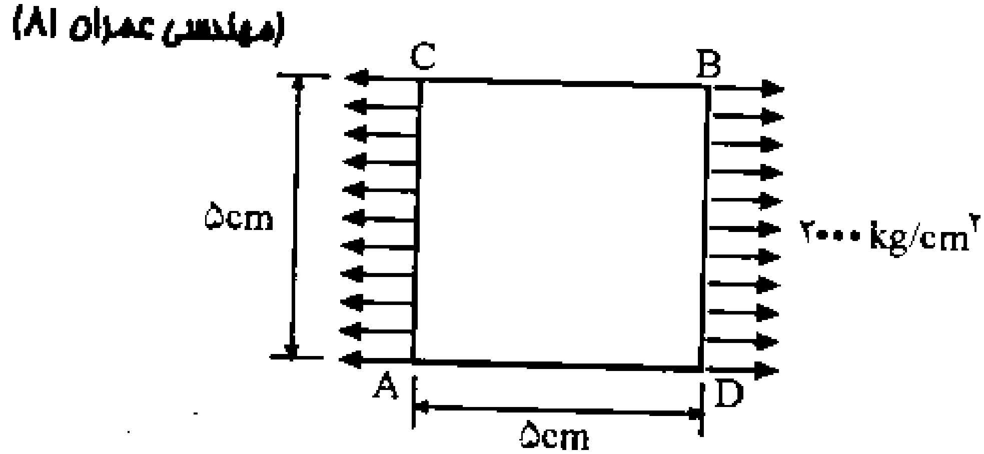
مدول برشی و مدول یانگ نیز دارای رابطه ی زیر با هم هستند:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \rightarrow \frac{E}{3} \le G \le \frac{E}{2}$$

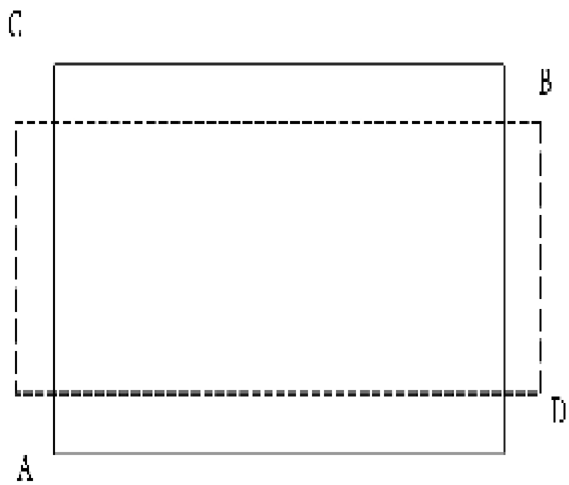
* مدول برشی همیشه از مدول یانگ کمتر است.

مثال: ورقی مطابق شکل تحت تنش تک محوری قرار گرفته است تغییر قطر AB چند Cm است؟

برای فولاد $E = ۲ \times ۱۰^{۶} kg/cm^{۲}$ $\nu = 0.3$



مربع نشان داده شده در شکل در اثر اعمال تنش کششی در راستای افقی، در این راستا دچار افزایش بعد و بر خلاف آن در راستای جانبی دچار کاهش بعد میشود (همانند شکل زیر).



فرض میکنیم که مربع بعد از تغییر شکل با A’B’C’D’ نمایش داده شود.

برای محاسبه تغییر قطر AB ابتدا قطر آن پس از تغییر شکل (A’B’) را محاسبه و از طول قطر اولیه (AB) کم میکنیم.

$$|A'B'| = \sqrt{A'D'^2 + B'D'^2}$$

تغییر قطرAB:

$$|A'B'|-|AB|$$
$$|AB|=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}=7.071$$

$\sigma_x=200\,Kg/cm^2 \qquad \sigma_y=\sigma_z=0$

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\nu\left(\sigma_y+\sigma_z\right)\right]=\frac{1}{2\times10^6}\times\left(200-0\right)=10^{-4}$$ بدون واحد

$$\varepsilon_y=\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\nu\left(\sigma_x+\sigma_z\right)\right]=\frac{1}{2\times10^6}\times\left(0-0.3\times200\right)=-3\times10^{-5}$$
$$\varepsilon_x=\frac{\left(\Delta\ell\right)_x}{\ell x}\Rightarrow10^{-4}=\frac{A'D'-AD}{5\,Cm}$$

σ_z برای ما مهم نیست در این جا مقدار آن صفر است.

$$10^{-4}=\frac{A'D'-5}{5}\Rightarrow A'D'=5.0005$$
$$\varepsilon_y=\frac{\left(\Delta\ell\right)y}{\ell y}=\frac{B'D'-BD}{5}\Rightarrow\quad-3\times10^{-5}=\frac{B'D'-5}{5}\rightarrow B'D'=4.99985$$
$$\Rightarrow A'B'=\sqrt{\left(5.0005\right)^2+\left(4.99985\right)^2}=7.0713$$
$$\Rightarrow A'B'-AB=7.0713-7.071=0.0003\ Cm$$

روش دوم:

$$|AB|^2=|AD|^2+|BD|^2\rightarrow \text{دیفرانسیل می گیریم}$$

$$2|AB|d\left(AB\right)=2|AD|d\left(AD\right)+2|BD|d\left(BD\right)$$
$$2\times7.07\times dAB=2\times5\times0.0005+2\times5\times-\left(0.00015\right)=0.0035$$

$$\left[\begin{array}{l} d\left(AD\right)=0.0005\quad,\quad d\left(BD\right)=-0.00015\\ \qquad d\left(AD\right)=|AD|\times\varepsilon_x=5\times10^{-4}\\ \qquad d\left(BD\right)=|AD|\times\varepsilon_y=5\times\left(-3\times10^{-5}\right)=0.00015\end{array}\right]$$
$$d\left(AB\right)=\frac{0.0035}{2\times7.071}=2.47\times10^{-4}$$

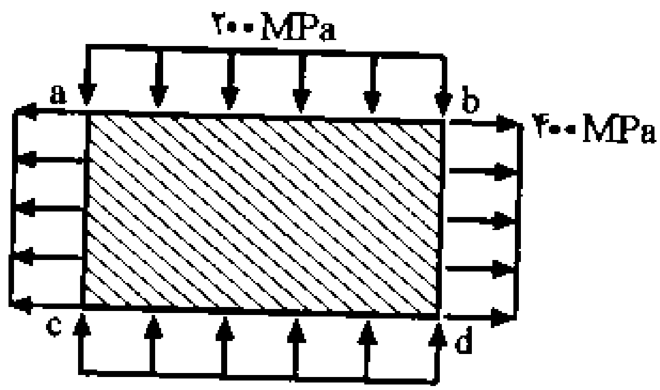
*استفاده از روش دوم برای حل اینگونه مسایل نسبت به روش اول در ارجحیت است.

مثال: یک ورق فولادی به مساحت $150\ Cm^2$ و ضخامت 1 cm تحت اثر تنش های یکنواختی مطابق شکل قرار گرفته است. مقدار تغییر مساحت ورق بر حسب mm^2 چقدر است؟

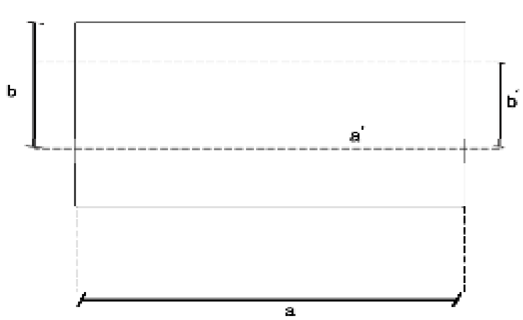
$$E = 200GPa \qquad \nu = 0.3 \qquad A = 1\ Cm$$

$$\sigma_x = 400\frac{N}{mm^2} \qquad \sigma_y = 200\frac{N}{mm^2} \qquad \sigma_Z = 0$$

(مهندسی عمران ۸۱)



حل: در اثر تنشهای وارده بعد افقی ورق زیاد شده و در عوض از بعد عمودی آن کاسته میشود. اگر بعد افقی و عمودی اولیه آن را a و b و بعد ثانویه ورق در دو راستای افقی و عمودی برابر ’a و ’b در نظر بگیریم خواهیم داشت:



$$A = ab \qquad dA = a.db + b.da$$

$$da = a.\varepsilon_x \rightarrow \varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right] = \frac{1}{2\times10^5}\left(400 - 0.3(-200)\right) = 0.0023$$

$$d_b = b.\varepsilon_y \rightarrow \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right] = \frac{1}{2\times10^5}\left(-200 - 0.3(400)\right) = -0.0016$$

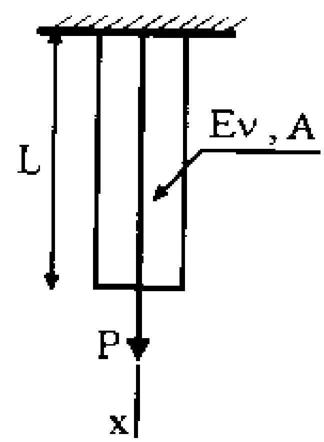
$$d_a = a\varepsilon_x = 0.023a \qquad d_b = b\varepsilon_y = -0.0016b$$

$$dA = a.\left(-0.0016b\right) + b.\left(0.0023a\right) = 0.0007\,ab = 0.0007\,A$$

$$= 0.0007\times150 = 0.105\,Cm^2 = 0.105\times\left(10\,mm\right)^2 = 10.5\,mm^2$$

مثال: میله ای مطابق شکل تحت نیروی کششی P قرار گرفته است میزان تغییر حجم آن تحت بار وارده چه قدر است؟ (از وزن میله صرف نظر شود)

(مهندس عمران ۷۷)



حل:

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\left(1-2\nu\right)}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)$$

$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = \frac{P}{A} \qquad \sigma_z = 0$$

$$e=\frac{\Delta V}{V}=\frac{(1-2\nu)}{E}\times\left(\frac{P}{A}\right)$$

$$V=A\ell=\pi r^2.l\Rightarrow\Delta V=\frac{A\ell}{E}(1-2\nu)\frac{P}{A}\Rightarrow\Delta V=\frac{P\ell}{E}\times(1-2\nu)$$

مثال: المانی زیر اثر تنش های اصلی $\sigma_۲=۲\sigma_۱$ قرار گرفته است. تنش اصلی $\sigma_۳$ چند برابر $\sigma_۱$ باشد تا تغییر حجم المان صفر شود؟ ضریب پواسون برابر یک سوم است.

حل: منظور از تنش اصلی حالتی است که به المان تنها تنشهای محوری (عمود بر سطح) وارد میشود و به المان تنش برشی اعمال نمیگردد. تنش اصلی جهت یک را در راستای X و تنشهای اصلی جهات 2 و 3 را نیز به ترتیب در جهات Y و Z فرض میکنیم.

$$\sigma_1=\sigma_x \qquad \sigma_2=\sigma_y \qquad \sigma_3=\sigma_z$$

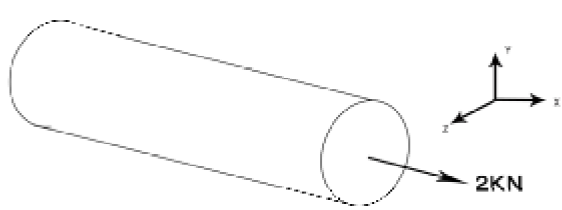
$$\nu=\frac{1}{3}$$

$$e=0 \qquad e=\frac{(1-2\nu)}{E}\times(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$$

$$e=\frac{(1-2/3)}{E}\times(\sigma_1+2\sigma_1+\sigma_3)=0\rightarrow e=\frac{1}{3E}\times(\sigma_1+2\sigma_1+\sigma_3)=0$$

$$\rightarrow 3\sigma_1+\sigma_3=0\rightarrow\sigma_3=-3\sigma_1$$

مثال: اگر میله ای با مقطع دایره به قطر 10 mm ساخته شده از مصالحی با ضریب ارتجاعی E=200 GPa و مدول برشی G=80GPa تحت تاثیر نیروی کششی برابر 2 KN قرار گیرد میزان کاهش قطر آن بر حسب mm چه قدر است؟



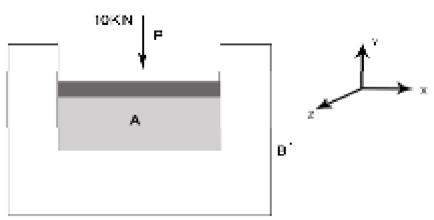
حل: راستای طولی میله را در جهت X و مقطع میله را در صفحه YZ فرض میکنیم.

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)}\Rightarrow 80=\frac{200}{2(1+\nu)}=\frac{100}{1+\nu}\Rightarrow 80+80\nu=100$$
$$\Rightarrow 80\nu=20\Rightarrow \nu=0.25$$
$$\sigma_x=\frac{2000N}{\pi\times\frac{10^2}{4}}=25.46\frac{N}{mm^2}$$
$$\sigma_y=\sigma_z=0$$

$$\varepsilon_z=\frac{۱}{E}\left[\sigma_z-\nu\left(\sigma_x+\sigma_y\right)\right]=\frac{۱}{۲۰۰\times ۱۰^{۳}}=\left[۰-۰.۲۵\times ۲۵.۴۶\right]=-۳.۱۸\times ۱۰^{-۵}$$

$d_z=10\times -3.18\times 10^{-5}=-3.18\times 10^{-4}$ کاهش قطر

مثال: سیلندر لاستیکی A در داخل استوانه فولادی صلب با سطح مقطع $0.01\ m^2$ قرار دارد. اگر نیروی وارده بر سیلندر لاستیکی P= 10 KN باشد فشار موجود بین سیلندر لاستیکی و استوانه فولادی چقدر است؟ مقدار ضریب پواسون برابر 0.45 است.



حل: جهت اعمال بار را جهت Y فرض میکنیم.

به علت جداره های صلب استوانه مقدار کرنش نیز در دو جهت X و Z برابر صفر است و تنها در جهت Y است که کرنش وجود دارد. برای آنکه کرنش در جهات X و Z صفر شود لازم است که فشاری از سمت جداره بر جسم در این دو جهت اعمال گردد که بر این اساس مقداری تنش در هر سه جهت مخالف صفر وجود خواهد داشت.

$P=10KN \qquad \nu=0.45$

$\varepsilon_y\neq 0 \qquad \varepsilon_{x,z}=0$

$\sigma_y=\sigma_x=\sigma_z\neq 0$

$$\sigma_y = \frac{P}{A} = \frac{-10000}{0/01} = -1\times10^6 \ \frac{N}{m^2} \qquad\qquad \sigma_y = -10^6 \ \frac{N}{\left(10^3\,mm\right)^2} = -1\frac{N}{mm^2} = -1MPa$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - 0.45\left(-1+\sigma_z\right)\right] = 0 \rightarrow \sigma_x - 0.45\sigma_z = 0.45 \qquad (1$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - 0.45\left(-1+\sigma_z\right)\right] = 0 \rightarrow \sigma_z - 0.45\sigma_x = -0.45 \qquad (2$$

در دستگاه قرار می دهیم:

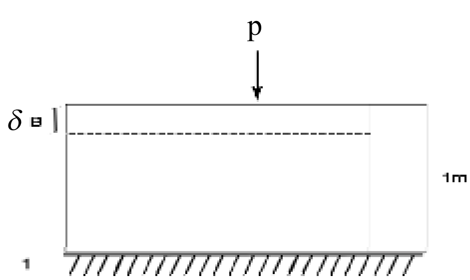
$$\begin{cases}(\sigma_X - 0.45\sigma_Z = -0.45)\times 0.45\\ -0.45\sigma_X + \sigma_Z = -0.45\end{cases}$$

$$\left(1-045^2\right)\sigma_z = -045^2 - 0.45 = 0.6525 \rightarrow 0.7975\sigma_z = -0.6525$$

$$\rightarrow \sigma_z = 0.82MPa$$

$$\sigma_x = -045 + 0.45\left(-0.82\right) \approx 0.82MPa$$

مثال: در آزمایش شکل 1 نتایج زیر ثبت شده است:



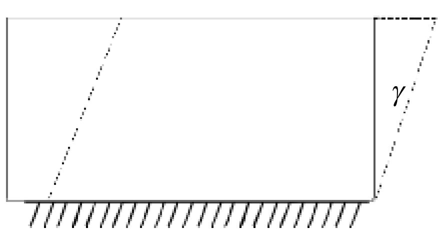
1

$\sigma = 40\,MPa$

$\delta = 4\,mm$

$\nu = 0.3$

در آزمایش شکل 2 برای نیروی جانبی وارده، $\gamma = 0.05rad$ **را ثبت کرده ایم. مقدار** τ **نظیر آن چه قدر است؟ در هر دو حالت بعد جسم در راستای عمودی یک متر است.**



2

$$\tau = G.\gamma \rightarrow \qquad \gamma = 0.05 \qquad G = ?$$
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad \nu = 0.3 \qquad E = ?$$

از آزمایش 1 مقدار E به دست می آید.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \rightarrow$$
$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell} \rightarrow \frac{0.004\,m}{1\,m} = 0.004$$ بدون واحد

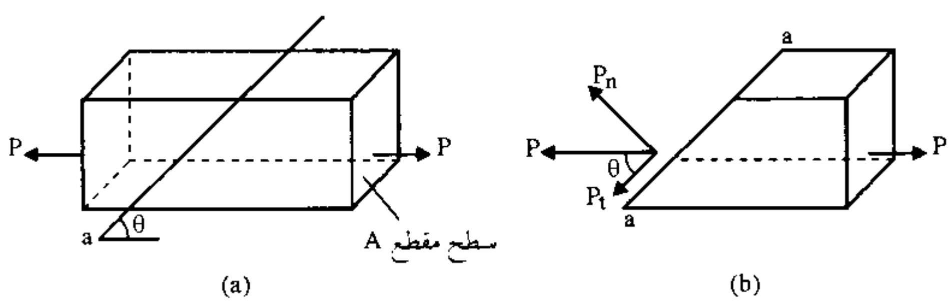
پسE برابر میشود با:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E = \frac{40}{0.004}\frac{N}{mm^2} = 10^4\,\frac{N}{mm^2}$$
$$\rightarrow G = \frac{10^4}{2(1+0.3)} = 3846\frac{N}{mm^2} \rightarrow \tau = G.\gamma \rightarrow 3846 \times 0.05 = 192.3\frac{N}{mm^2}$$

* γ حتماً باید بر حسب رادیان باشد.

تنشهای وارد بر صفحات مایل در بارگذاری محوری

اگر میله ای مطابق شکل زیر تحت کشش محوری باشد، در آن صورت در مقطعی از این میله که با سطح افق زاویه θ میسازد، تنشها به صورت روابط داده شده خواهند بود.



در صفحه مایل دو محور جدید معرفی میکنیم: یک محور به موازات سطح مایل و یک محور دیگر عمود بر سطح مایل

سپس نیرو محوری P را بر روی این دو محور جدید تصویر کرده و مولفه آن را بر روی این دو محور محاسبه میکنیم. مولفه موازی با سطح مایل ایجاد تنش برشی و مولفه عمود بر سطح مایل ایجاد تنش عمودی در صفحه مایل میکند.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{برشی} & P_t = P\cos\theta \\ \text{محوری} & P_n = P\sin\theta \\ & A' = \dfrac{A}{\sin\theta} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \tau_{ave} = \dfrac{P_t}{A'} = \dfrac{P}{A}\cos\theta\sin\theta \\ \sigma_{ave} = \dfrac{P}{A}\sin^{2}\theta \end{array}$$

توجه شود که مقدار سطح مقطه در سطح مایل هم بیشتر از سطح مقطع میله در حالت عادی است. A’ در رابطه بالا نمایش دهنده مقدار سطح مقطع در صفحه مایل است.

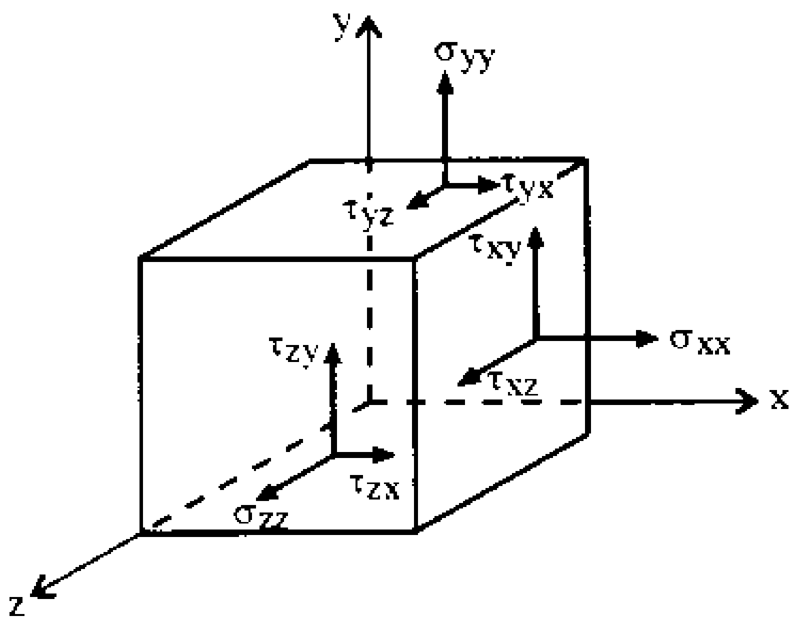
به این ترتیب همانطور که در روابط بالا هم دیده میشود نیروی محوری قادر به ایجاد تنش برشی هم در صفحات مایل میباشد. مقدار ماکسیمم این تنش در صفحه ای با زاویه 45 درجه با راستای طولی میله خواهد بود که به شرح رابطه زیر مقدار تنش برشی ماکسیمم برابر نصف تنش محوری خواهد بود:

$$\tau_{\max} = \frac{P}{A}\sin 45.\cos 45 = \frac{P}{2A}$$

تانسور تنش

اگر المانی مکعبی شکل از یک جسم (قسمت بسیار کوچکی از یک جسم را المان مینامند) که تحت اثر یکسری نیروهاست را جدا کنیم، در آن تنشهایی به صورت شکل داده شده بوجود می آید. به هر یک از وجوه مکعب دو تنش برشی و یک تنش عمودی وارد میشود. در نامگذاری این تنشها از دو اندیس استفاده میشود که اندیس اول مشخص کننده جهت

بردار نرمال صفحه ای از مکعب است که تحت تنش است و اندیس دوم نشاندهنده راستای بردار تنش است.



اگر تنشهای موجود بر روی المان مکعبی را به صورت ماتریسی نشان دهیم، ماتریس حاصل را تانسور تنش می نامیم.

$$[\sigma_{iy}]=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix} \leftarrow$$ تانسور تنش

ثابت میشود که :

$$\tau_{yx}=\tau_{xy}$$
$$\tau_{yz}=\tau_{zy}$$
$$\tau_{xz}=\tau_{zx}$$

و بر این اساس ماتریس تانسور تنش تبدیل به یک ماتریس متقارن میگردد.

از خواص این ماتریس میتوان به موارد زیر اشاره نمود:

1- مجموع عناصر روی قطر ماتریس عددی ثابت است و با چرخش المان در آن تغییری ایجاد نمیگردد

2- دترمینان ماتریس فوق نیز عددی ثابت است و با چرخش المان تغییری در آن ایجاد نمیگردد.

3-

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = \text{ثابت}$$

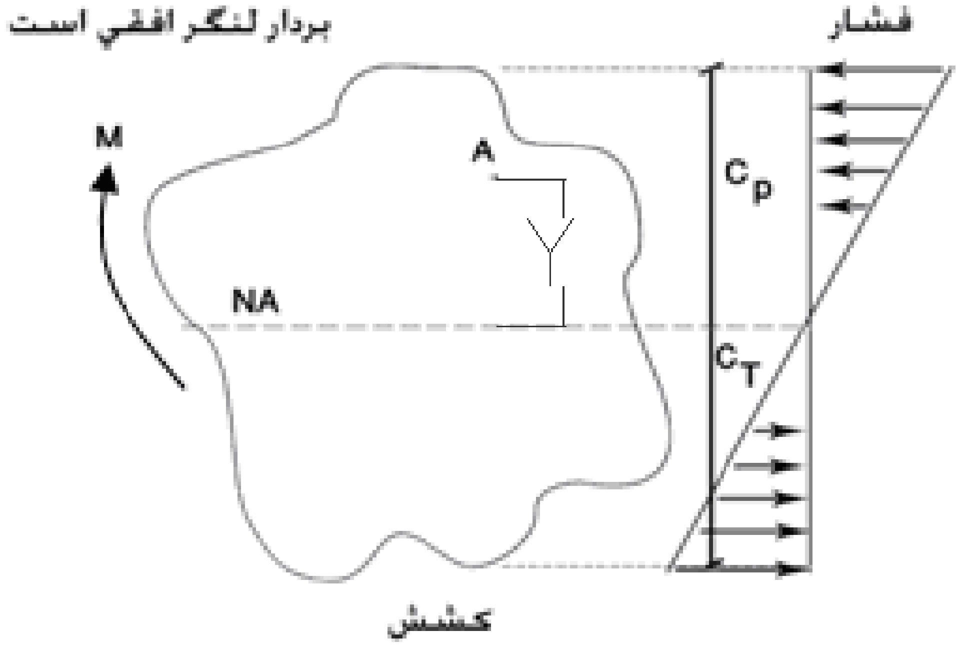
تنش های خمشی

تنشهای خمشی ، تنش های ناشی از اعمال لنگر خمشی در جسم می باشد. این تنشها از جنس تنشهای عمود بر سطح میباشند و در هر دو حالت رفتار الاستیک و پلاستیک مقطع قابل تعریف میباشند. در اینجا بحث بیشتر در حالت رفتار الاستیک ماده است؛ مگر در مواردی که مستیماً ذکر خواهد شد.

توزیع تنش های خمشی در مقطع با فرض رفتار الاستیک ماده:

در حالت الاستیک توزیع تنش در مقطع به صورت خطی می باشد و در محور خنثی تنش صفر است و این تنش با دور شدن از محور خنثی به صورت خطی افزایش می یابد ماکسیمم تنش های کششی و فشاری در دورترین نقاط نسبت به محور خنثی رخ میدهد.

محور خنثی محوری است به موازات بردار لنگر که از مرکز ثقل مقطع عبور می کند. در اکثر موارد که بردار لنگر در راستای افقی مقطع است، محور خنثی هم افقی است و در برخی موارد هم که لنگر عمودی است محور خنثی هم عمودی است.(حتی ممکن است در مورد بردارهای لنگر مایل این محور به صورت مایل نیز باشد)



مقدار تنش در هر نقطه دلخواه از مقطع بستگی به فاصله آن نقطه از محور خنثی دارد و از رابطه زیر قابل محاسبه است. در این رابطه y فاصله نقطه مورد نظر تا محور خنثی میباشد.

تنش در نقطه دلخواه از مقطع $\sigma_A = \frac{M.y}{I_{NA}}$

مقادیر ماکسیمم تنش خمشی فشاری وکششی در دورترین نقاط تا محور خنثی رخ میدهد. این دو مقدار بر اساس دو رابطه زیر قابل محاسبه است. اینکه مقدار ماکسیمم تنش کششی و فشاری در بالا یا پایین مقطع رخ میدهد، بستگی به جهت بردار لنگر دارد. برای لنگرهای ساعتگرد قسمت بالا تحت فشار و قسمت پایین تحت کشش قرار میگیرد و

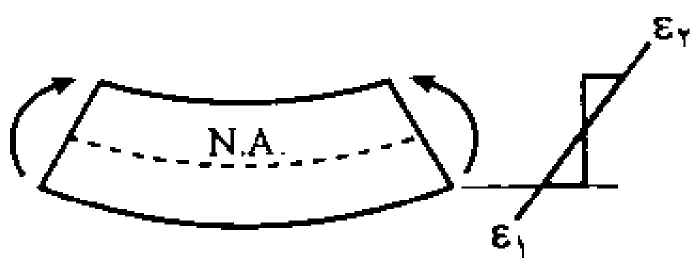
بالعکس در مورد لنگر پادساعتگرد قسمت پایین تحت فشار و قسمت بالا تحت کشش قرار میگیرد.

تنش ماکسیمم فشاری $\sigma_{MAXP} = \frac{M.C_P}{I_{NA}}$

تنش ماکسیمم کششی $\sigma_{\max T} = \frac{M.C_T}{I_{NA}}$

C_P و C_T فاصله دورترین نقاط مقطع از تار خنثی به ترتیب در وجه فشاری و کششی مقطع است.

شکل را از راستای طولی نگاه می کنیم:



نمودار توزیع کرنش در مقطع

شکل به صورت قطاعی از دایره

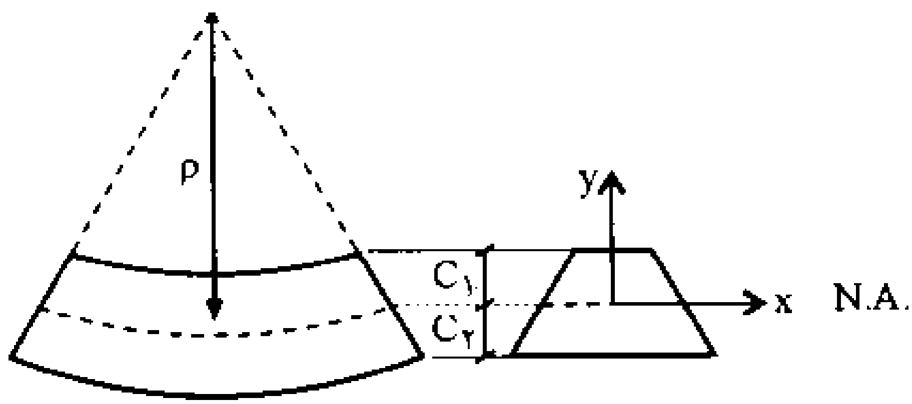
همانطور که در شکل نیز دیده میشود در اثر لنگر خمشی وارد شده ، شکل مستقیم تیر مربوط به قبل از اعمال خمش تبدیل به قطاع کوچکی از یک دایره به شعاع ρ میگردد. قسمتهایی از مقطع که تحت فشار هستند، دچار کاهش طول (کرنش منفی) و قسمتهایی از مقطع که تحت تنشهای کششی است، دچار افزایش طول (کرنش مثبت) میشود. در محور خنثی هم تغییر طولی به وجود نمی آید و مقدار کرنش صفر خواهد بود.

محاسبه کرنش در نقاط مختلف مقطع:

اگر در هر نقطه تناسبی ببندیم: مقدار کرنش متناسب با شعاع دایره و فاصله تا محور خنثی (y) می شود و از رابطه زیر قابل محاسبه است.

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}$$

ρ: شعاع دایره



$$\varepsilon = \frac{y}{c_1}\varepsilon_1$$

$$\varepsilon = \frac{y}{c_2}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_1}{c_1} = \frac{\varepsilon_2}{c_2} = \frac{M}{EI}$$

ε_1 و ε_2مقادیر کرنش متناظر با به ترتیب بالاترین و پایینترین نقطه مقطع میباشند که در واقع مقادیر ماکسیمم کرنشهای کششی و فشاری هم هستند.

با نوشتن دوباره رابطه محاسبه تنش خمشی در نقاط بالا و پایین مقطع میتوانیم یک مفهوم جدید تحت عنوان «اساس مقطع» را نیز تعریف نماییم. اساس مقطع هم نسبت به بالای مقطع و هم نسبت به پایین مقطع قابل تعریف است.

اساس مقطع نسبت به بالای مقطع: $\sigma_{\max TOP} = \frac{M.C_{TOP}}{I_{NA}} \rightarrow \frac{I_{NA}}{c_{TOP}} = S_{TOP}$

اساس مقطع نسبت به پایین مقطع: $\sigma_{\max BOT} = \frac{M.C_{BOT}}{I_{NA}} \rightarrow \frac{I_{NA}}{C_{BOT}} = S_{BOT}$

$$\sigma_{\max TOP} = \frac{M}{S_{TOP}} \qquad \sigma_{\max BOT} = \frac{M}{S_{BOT}}$$

در روابط بالا C_{BOT} و C_{TOP} به ترتیب فاصله دورترین نقاط تا محور خنثی در پایین و بالای مقطع میباشند.

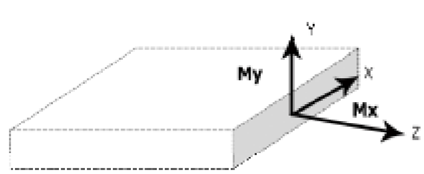
اگر مقاطع حول محور خنثی متقارن باشد محور خنثی از وسط مقطع عبور کرده و مقادیر C_{BOT} و C_{TOP} با هم برابر می شوند.

اساس مقطع حول محور x $\qquad S_{TOP}=S_{BOT}= S_x$

* اساس مقطع: یک مفهوم است که بر اساس آن قوت یا ضعف مقطع در برابر لنگر خمشی مشخص می شود. هر چه قدر اساس مقطع بیشتر باشد در برابر یک لنگر خمشی ثابت تنش های خمشی کمتری ایجاد می شود.

خمش چند محوره:

اگر مقطع تحت دو لنگر خمشی حول دو محور متفاوت از مقطع باشد، برای محاسبه تنش در هر نقطه دلخواه از مقطع، تنش های ناشی از هر یک از این لنگر های خمشی را جداگانه محاسبه و با هم جمع جبری می کنیم.



→→نمایش بردار لنگر، جهت مثبت پاد ساعتگرد

$$\sigma_Z = \frac{M_x . y}{I_x} \pm \frac{M_y . x}{I_y}$$

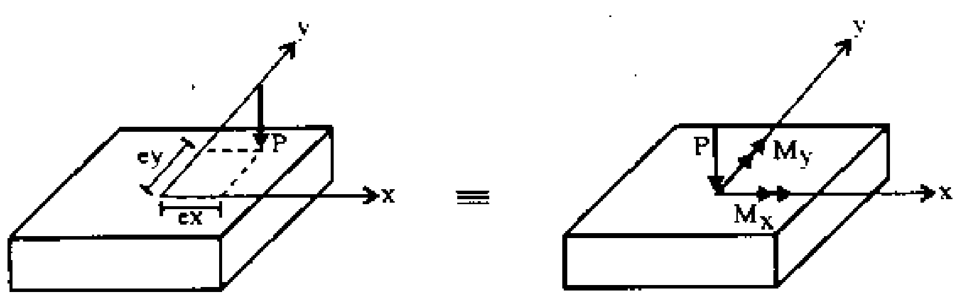
اگر مقدار تنش در مقطع بر حسب رابطه بالا را برابر صفر قرار دهیم ($\sigma_Z = 0$) ، معادله محور خنثای مقطع که مطمئناً یک خط مایل است محاسبه میگردد. (با توجه به آنکه در محور خنثی تنش صفر است، اگر مقدار σ_Zرا برابر صفر قرار دهیم معادله محور خنثی بدست می آید. پس محور خنثی به صورت مایل به دست می آید.)

معادله خط مورب ← $ay \pm bx = 0$

در رابطه ی بالا علامت + یا – با توجه به فشاری یا کششی بودن تنش مورد استفاده قرار می گیرد و برای تنش های کششی از علامت + و برای تنش های فشاری از علامت – استفاده می کنیم.

بارهای خارج از محور:

اگر به مقطع یک جسم در نقطه ای غیر از مرکز ثقل آن یک بار محوری وارد شود برای محاسبه ی تنش ها در این مقطع، آن بار محوری را به همراه لنگر خمشی ناشی از برون از محوریت بار نسبت به مرکز ثقل جسم به مرکز ثقل مقطع منتقل می کنیم. حال مقطع هم تحت تنش محوری و هم تحت تنش خمشی می باشد. برای محاسبه تنش در هر نقطه دلخواه از مقطع، این تنش ها به صورت جداگانه محاسبه و با هم جمع بسته میشوند.



$$\sigma = \frac{P}{A} \pm \frac{M_x.y}{I_x} \pm \frac{M_y x}{I_y}$$

P: بار محوری

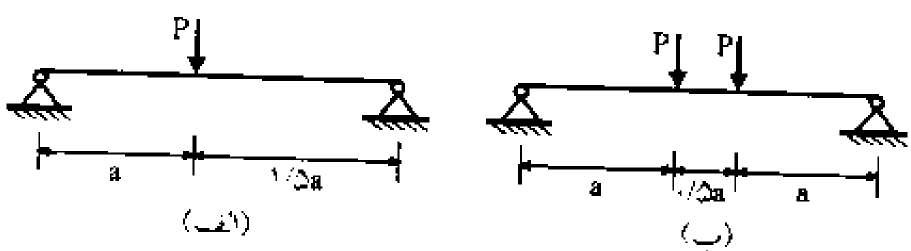
A: سطح مقطع

A: محل اعمال نیروی محوری P

$$M_x = P.e_y \;\; , \;\; M_y = P.e_x$$

در رابطه بالا e_x و e_y به ترتیب مقدار برون از مرکزیت بار نسبت به مرکز سطح مقطع در راستاهای x و y میباشد.

مثال: تیرهای شکل زیر از یک جنس و با یک سطح مقطع و با رفتار خطی می باشند اگر تنش ماکسیمم خمشی درتیر الف 60 MPa باشد، تنش ماکسیمم در تیر B چند MPa است؟ (سراسری 82)



جواب:

$$\sigma_{\max} = 60\,MPa \qquad \sigma_{MAX2} = ?$$

$$\sigma_{\max 1} = \frac{M_{\max 1}}{S_1} \qquad \sigma_{\max z} = \frac{M_{\max 2}}{S_2} \qquad S_1 = S_2$$

چون مقطع دو تیر با هم مشابه است، اساس مقطع آن نیز مساوی است.

$$\frac{\sigma_{\max ۱}}{\sigma_{\max ۲}} = \frac{M_{\max ۱}}{M_{\max ۲}} = \frac{۶۰}{\sigma_{\max ۲}}$$

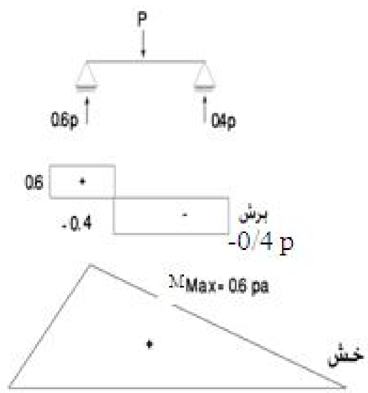
در صورتی که نسبت لنگرهای ماکسیمم در دو تیر محاسبه شود تنش ماکسیمم در حالت

B نیز به دست می آید.

تیر الف:

$$\sum M_B = ۰ \Rightarrow -A_y \times ۲/۵a + P \times ۱/۵ = ۰ \Rightarrow Ay = ۰/۶P$$
$$\uparrow \sum F_y = ۰ \Rightarrow ۰/۶p - p + B_y = ۰ \Rightarrow B_y = ۰/۴p$$

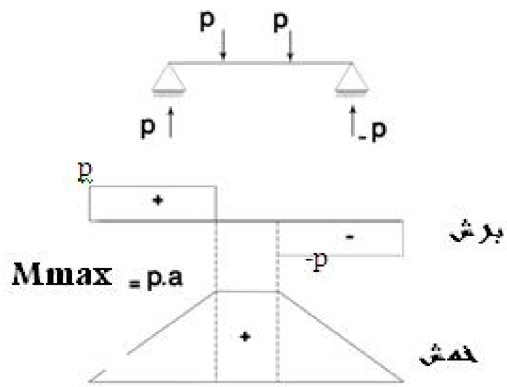
چون B_x , A_x لنگری در تیر ایجاد نمی کنند نیازی به محاسبه ی آنها نیست.



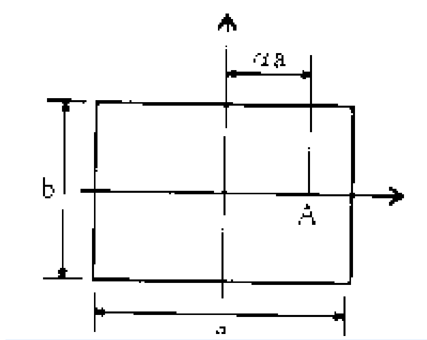
تیر ب:

-p

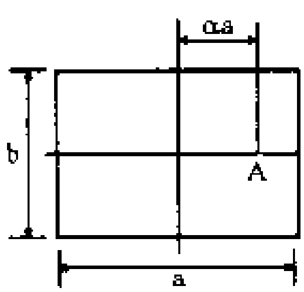
$$\sum M_B = 0 \rightarrow -A_y \times 2.5a + P \times 1.5a + P.a = 0 \Rightarrow Ay = P$$
$$\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow P - P - P + B_y = 0 \Rightarrow B_y = P$$
$$M_{\max 2} = P.a$$
$$\frac{M_{\max 1}}{M_{\max 2}} = \frac{0.6P.a}{P.a} = 0.6 = \frac{60}{\sigma_{\max 2}} \rightarrow \sigma_{\max 2} = \frac{60}{0.6} = 100MPa$$

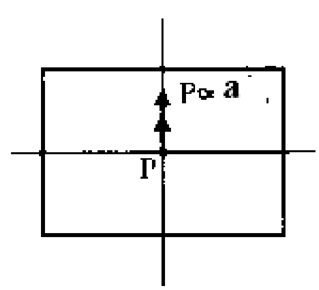


مثال: در مقطع نشان داده شده نیروی محوری P به صورت فشاری در نقطه ی A وارد می شود. α چه مقدار باشد تا تنش فشاری دو برابر تنش کششی شود؟ (82 سراسری)



جواب:





با توجه به برون از مرکزیت بار نسبت به مرکز سطح مقطع یک لنگر خمشی در مقطع به میزان $P.\alpha.a$ نیز علاوه بر بار محوری ایجاد میگردد. این لنگر سمت راست مقطع را تحت فشار و سمت چپ را تحت کشش قرار میدهد و تنشهای ناشی از آن با تنش یکنواخت فشاری ناشی از بار محوری جمع میشود. بر این اساس و با توجه به صورت سوال مقدار عددی تنش در دورترین نقطه سمت راست باید دو برابر مقدار عددی متناظر با تنش دورترین نقطه سمت چپ مقطع گردد.

مقدار تنش فشاری ماکسیمم به شرح زیر محاسبه میشود:

$$\sigma_P = \frac{-P}{A} - \frac{M\left(\frac{a}{2}\right)}{I_{NA}} = \frac{-P}{ab} - \frac{(P.\alpha.a)\left(\frac{a}{2}\right)}{\frac{a^3 b}{12}} = \frac{-P}{ab} - \frac{6p\alpha}{ab} = -\frac{P}{ab}(1+6\alpha) \le 0$$

$$I_{NA} = I_y = \frac{a^3 b}{12}$$

به همین ترتیب تنش کششی ماکسییم هم محاسبه میگردد:

$$\sigma_T = \frac{-P}{a.b} + \frac{6P.\alpha}{ab} = \frac{-P}{ab}(1-6\alpha) \ge 0$$

$$\Rightarrow |\sigma_p| = \frac{P}{ab}(1+6\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{P}{ab}(1+6\alpha) = 2\frac{-P}{ab}(1-6\alpha)$$

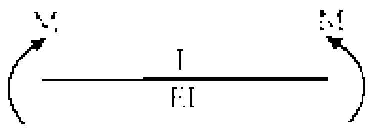
$$\Rightarrow |\sigma_T| = \frac{-P}{ab}(1-6x)$$

$$\Rightarrow 1+6\alpha = -2(1-6\alpha)$$

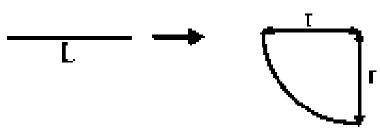
$$\Rightarrow 1+6\alpha = -2+12\alpha \Rightarrow 3 = 6x$$

$$\alpha = 0.5$$

مثال: لنگر خمشی لازم جهت خم کردن میله ای به صلبیت خمشی EI و طول L به صورت دایره چه قدر است طول میله را می باشد؟ (سراسری 81)



جواب:



طول کمان بدست آمده برابر همان طول اولیه تیر یعنی L می باشد. با توجه به آن که این کمان 90 درجه می باشد، شعاع کمان به شکل زیر قابل محاسبه است:

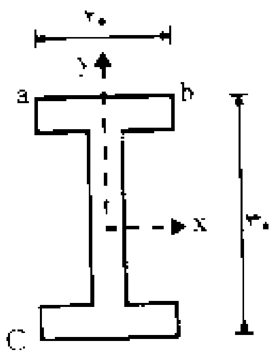
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

$$L = \frac{\pi r}{2} \Rightarrow r = \frac{2L}{\pi}$$

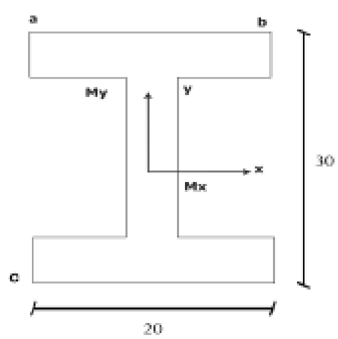
$$\frac{1}{2\frac{L}{\pi}} = \frac{M}{EI} \rightarrow M = \frac{EI.\pi}{2L}$$

مثال: مقادیر کرنش عمودی در نقاط C,B,A در مقطع تیری به شکل رو به رو به ترتیب برابر $\varepsilon_a = 1.5 \times 10^{-3}$ $\varepsilon_b = -2.5 \times 10^{-3}$ $\varepsilon_c = 3.5 \times 10^{-3}$ **محاسبه شده اند، اندازه ی لنگرهای M_x (لنگر حول محور x)، M_y (لنگر حول محور y) چه ارتباطی با هم دارند؟ (سراسری 80)**

$EI_y = EI$ $\qquad$ $EI_x = ۱۰۰EI$



جواب: به مقطع نمایش داده شده دو لنگر Mx و My حول محورهای x و y و یک بار محوری P وارد میشود.



رابطه ی هوک $\sigma = E.\varepsilon$

$$\sigma_a = E.\varepsilon_a$$
$$\sigma_b = E.\varepsilon_b$$
$$\sigma_c = E.\varepsilon_c$$

$$\sigma_a = \frac{P}{A} \pm \frac{M_x y}{I_x} \pm \frac{M_y . x}{I_y}$$

فرض می شود لنگرهای M_y ,M_x به صورت پاد ساعتگرد در راستای + محور ها باشد، بر این اساس لنگر M_x در نقاط a,b تنش مثبت و در نقطه C تنش منفی ایجاد می کندبه همین شکل برای لنگر M_y سمت چپ نقاط C.,a تحت کشش و تنش مثبت و سمت راست شامل نقطه b تحت فشار و تنش منفی خواهد بود. . بار محوری P نیز به صورت کششی فرض میشود که در تمام نقاط مقطع تنش مثبت ایجاد مینماید.

$$\sigma_a = \frac{P}{A} + \frac{15M_x}{100I} + \frac{My.10}{I} = E \times 1.5 \times 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \frac{P.I}{A} + 0.15M_x + 10M_y = 1.5 \times 10^{-3} EI$$

$$\sigma_b = \frac{P}{A} + \frac{M_x \times 15}{100I} - \frac{M_y \times 10}{I} = -2.5 \times 10^{-3} E \Rightarrow \frac{P.I}{A} + 0.15M_x - 10M_y = -2.5 \times 10^{-3} EI$$

$$\sigma_c = \frac{P}{A} - \frac{M_x \times 15}{100I} + \frac{M_y \times 10}{I} = 3.5 \times 10^{-3} E \Rightarrow \frac{P.I}{A} - 0.15M_x + 10M_y = 3.5 \times 10^{-3} EI$$

دو رابطه اول و دوم را از هم کم میکنیم. خواهیم داشت:

$$20M_y = 4 \times 10^{-3} EI \Rightarrow M_y = 0.2 \times 10^{-3} EI$$

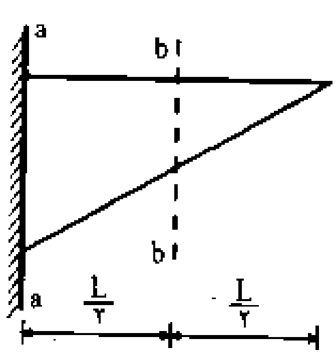
به همین شکل اگر دو رابطه دوم و سوم را از هم کم کنیم، خواهیم داشت:

$$0.3M_x = -6 \times 10^{-3} EI \Rightarrow M_x = -20 \times 10^{-3} EI$$

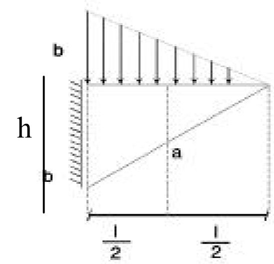
و به این ترتیب خواهیم داشت:

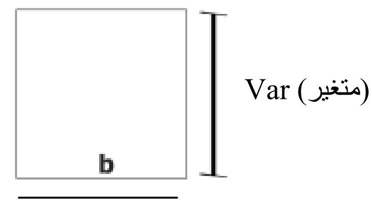
$$\frac{M_x}{M_y} = \frac{-20 \times 10^{-3} EI}{0.2 \times 10^{-3} EI} = -100$$

مثال: تیر شکل مقابل با پهنای ثابت و ارتفاع متغیر (خطی) تحت اثر وزن خود قرار گرفته است. چه رابطه در مورد تنش های حداکثر در مقاطع b.b , a.a وجود دارد؟ (سراسری 80)



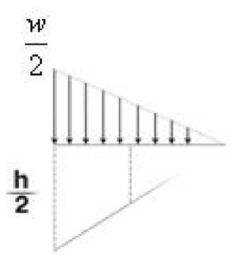
جواب: با توجه به اینکه تیر تنها تحت اثر وزن خود است ، بار وارد بر آن به صورت گسترده و مشابه شکل زیر است. چون ارتفاع تیر هم به صورت خطی زیاد میشود ، بار هم به صورت گسترده خطی خواهد بود.





بار وارد بر تیر متناسب با سطح مقطع تیر در هر مقطع انتخابی از آن می باشد چون مقطع تیر به صورت خطی اضافه می شود بار تیر نیز به صورت خطی از صفر تا مقدار maxخود اضافه می شود.

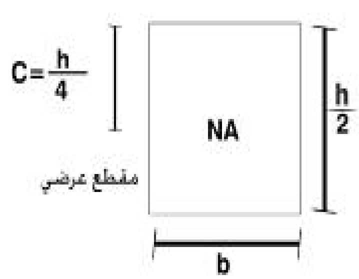
مقطع a-a



حول مقطع A در وسط تیر معادله تعادل لنر را مینویسیم:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -\left(\frac{W}{2}\times\frac{\ell}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{\ell}{2}\times\frac{1}{3}+M_a = 0$$

$$\Rightarrow M_a = \frac{W\ell^2}{48}$$



با به دست آمدن مقدار لنگر ماکسیمم این مقطع میتوان مقدار تنش ماکسیمم خمشی در این مقطع به دست می آید:

$$\sigma_{\max}(a.a) = \frac{M_a.c}{I} = \frac{\frac{W\ell^2}{48} \times \frac{h}{4}}{\frac{bh^3}{96}} = \frac{W\ell^2}{2bh^3}$$

$$I_{a-a} = \frac{b\left(\frac{h}{2}\right)^3}{12} = \frac{bh^3}{96}$$

برای مقطع b-b هم همین مراحل را به طور مشابه طی میکنیم تا تنش ماکسیمم خمشی در این مقطع به دست آید:

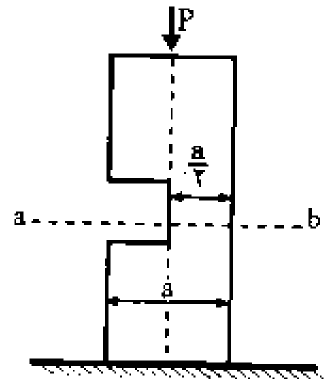
$$\sum M_B = -\left(W \times \ell \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{3} \times \ell + M_b = 0 \Rightarrow M_b = \frac{W\ell^2}{6}$$

$: b-b$

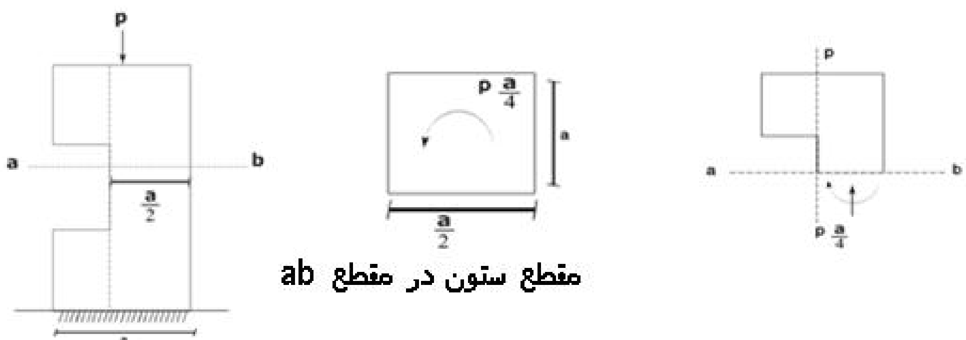
$$I_{b.b} = \frac{bh^3}{12} \qquad \sigma_{\max(b.b)} = \frac{M_{b.}c}{I} = \frac{\frac{WL^2}{6} \times \left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{1}{12}bh^3} = \frac{WL^2}{bh^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_{\max\, x(a-a)}}{\sigma_{\max(b-b)}} = \frac{\frac{WL^2}{2bh^2}}{\frac{WL^2}{bh^2}} = 0.5$$

مثال: ستون کوتاهی به مقطع مربع دارای بریدگی مطابق شکل می باشد max تنش فشاری تحت تاثیر بار P در مقطع ab چه قدر است؟ (سراسری 79)



جواب: در قسمت a b مقطع زده و واکنش های آن را می گذاریم. چون بار P نسبت به مرکز مقطع در قسمت ab دارای برون مرکزیتی به میزان a/4 است، پس علاوه بر بار محوری P یک لنگر خمشی به میزان P.a/4 ایجاد میگردد. این لنگر به صورت ساعتگرد میباشد.



مقطع ستون در مقطع ab

لنگر ایجاد شده سمت چپ مقطع را تحت فشار و سمت راست را تحت کشش قرار میدهد.

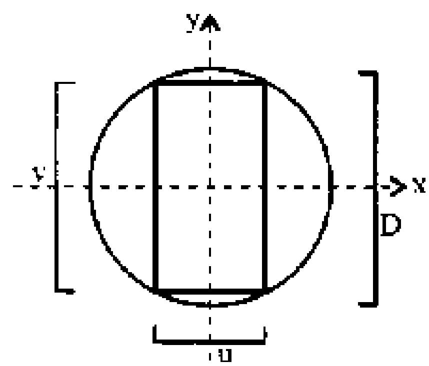
بار محوری نیز به علت فشاری بودن ایجاد تنش فشاری می کند و بر این اساس ماکسیمم تنش فشاری در سمت چپ مقطع ایجاد می شود.

$$\sigma = \frac{P}{A} \pm \frac{M_x y}{I_x} \pm \frac{M_{y.} x}{I_y} \qquad M_x = 0 \ , \ M_y = \frac{Pa}{4}$$

$$\sigma = -\frac{P}{\frac{a^2}{2}} + 0 - \frac{p\frac{a}{4} \times a}{\frac{a^4}{96}} = -\frac{2P}{a^2} - \frac{6P}{a^2} = \frac{-8P}{a^2}$$

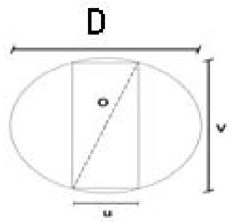
$$I_y = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^3 \times a}{12} = \frac{a^4}{96}$$

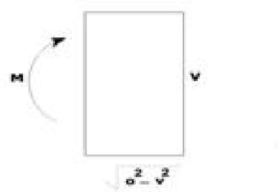
مثال: یک تیر چوبی به مقطع دایره به قطر D در اختیار می باشد می خواهیم از آن یک تیر چوبی با مقطع مربع مستطیل در آوریم، چه نسبتی باید بین اضلاع مستطیل ($\frac{U}{V}$) برقرار باشد تا حداکثر مقاومت خمشی بدست آید؟ (سراسری 76)



جواب: دو ضلع مستطیل اضلاع زاویه قائمه مثلث قائم الزاویه ای هستند که وتر آن قطر دایره میباشد و به این ترتیب در این مثلث رابطه فیثاغورث را میتوان نوشت و طول یکی از اضلاع را بر حسب دیگری محاسبه کرد.

$$U = \sqrt{D^2 - V^2}$$





مستطیل را تحت لنگر قرار می دهیم.

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{M}{\frac{\sqrt{D^2 - V^2}}{6}.V^2} = \frac{6M}{\sqrt{D^2 - V^2} \times V^2}$$

$$S = \frac{b.h^{۲}}{۶} = \frac{\sqrt{D^{۲} - V^{۲}} \times V^{۲}}{۶}$$

چون جنس مقطع ثابت است و مقدار تنش مجاز مقطع چوبی هم ثابت است، برای آن که لنگر ماکسیمم شود لازم است مخرج کسر نیز ماکسیمم شود. از مخرج کسر مشتق گرفته و برابر صفر قرار می دهیم.

$$d(UV) = dU.V + U.dV$$

$$d\left(\sqrt{D^2 - V^2}.V^2\right) = \frac{-2V}{2\sqrt{D^2 - V^2}}.V^2 + 2V.\sqrt{D^2 - V^2} = \frac{-V^3 + 2VD^2 - 2V^3}{\sqrt{D^2 - V^2}}$$

مخرج مخالف صفر $D \neq V$ $\qquad \dfrac{2VD^2 - 3V^3}{\sqrt{D^2 - V^2}} = 0$

صورت کسر را مساوی صفر قرار می دهیم:

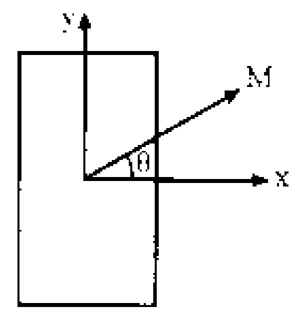
$$2VD^2 = 3V^3 \Rightarrow \qquad 2D^2 = 3V^2 \rightarrow$$

$$V^2 = \frac{2}{3}D^2 \rightarrow V = \sqrt{\frac{2}{3}}\ D$$

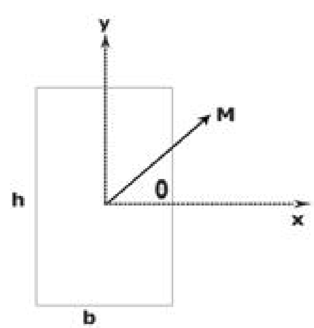
$$U = \sqrt{D^2 - V^2} = \sqrt{D^2 - \frac{2}{3}D^2} = \sqrt{\frac{D^2}{3}} = \frac{D\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{U}{V} = \frac{D\frac{\sqrt{3}}{3}}{D\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال: یک لنگر خمشی به مقدار ثابت به تیری با مقطع مربع مستطیل وارد می شود امتداد لنگر خمشی چه باشد تا تنش خمشی ماکسیمم باشد؟ (سراسری 78)



جواب: لنگر وارد به مقطع را به دو مولفه افقی و عمودی تجزیه میکنیم:



$$M = Mx.i + My.j$$
$$M_x = M.Cos\theta \ \ , \ \ My = M.Sin\theta$$
$$\vec{M} = MCos\theta.i + MSin\theta.j$$
$$\sigma = \frac{P}{A} \pm \frac{Mx.y}{I_x} \pm \frac{My.x}{I_y}$$

در بالا و پایین مقطع تنش ناشی از M_x و در سمت چپ و راست مقطع تنش ناشی از My ماکسیمم است و تنش ماکسیمم جایی رخ می دهد که هر دو تنش ناشی از , M_y M_x ماکسیمم و هم علامت باشند. پس بر این اساس چهار گوشه مقطع مستطیل دارای تنش های ماکسیمم ناشی از M_y , M_x می باشد که در دو گوشه از این چهار گوشه تنش ها دارای علامت مخالف هم می باشند و در دو گوشه دیگر هم علامت می باشند که در این دو گوشه قدر مطلق مجموع تنش بیشینه است.

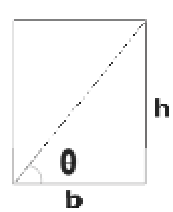
$$|\sigma| = \frac{MCos\theta.h/2}{bh^3/12} + \frac{MSin\theta.\frac{b}{2}}{b^3\frac{h}{12}} = \frac{6MCos\theta}{b^2h} + \frac{6MSin\theta}{bh^2} = \frac{6M}{bh}\left(\frac{\cos\theta}{h} + \frac{Sin\theta}{b}\right)$$

برای آن که تنش ماکسیمم شود، باید مشتق تنش را برابر صفر قرار دهیم.

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow \frac{-Sin\theta}{h} + \frac{Cos\theta}{b} = 0 \Rightarrow$$
$$-bSin\theta + hCos\theta = 0 \Rightarrow$$

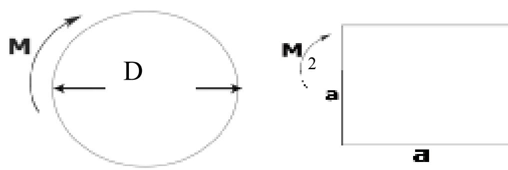
$$h\cos\theta. = b\sin\theta \Rightarrow \frac{h}{b} = \tan\theta \Rightarrow \theta = Arc\tan\left(\frac{h}{b}\right)$$

در راستای قطر مستطیل تانژانت زاویه برابر h/b می شود. پس لنگر اگر در راستای قطر مستطیل اعمال شود، تنش ماکسیمم می شود.



نکته: اگر فرض کنیم h>b باشد مقطع حول محور افقی آن قوی تر است و در صورتی که حول محور افقی لنگر اعمال شود تنش ایجاد شده min می شود.

مثال: ممان خمشی مجاز تیر با مقطع مربع چند برابر ممان مجاز تیر با مقطع دایره ای از جنس مشابه و سطح مقطع یکسان می باشد. (سراسری 74)



$$\frac{M_{۲}}{M_{۱}} = ?$$

مساحت ها با هم یکی است.

جواب: با توجه به یکسان بودن مساحت دو مقطع داریم:

$$\frac{\pi D^2}{4} = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{\pi}\ \frac{D}{2}$$

$$\sigma_1 = \frac{M_1}{S_1} = \frac{M_1}{\pi D^3/32} = \frac{32M_1}{\pi D^3}$$

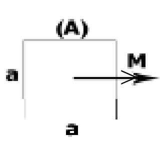
$$\frac{I}{C} = S_1 = \frac{\pi D^4/64}{D/2} = \frac{\pi D^3}{32} \qquad S_2 = \frac{I}{C} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

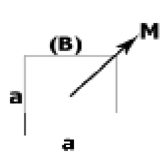
$$\sigma_2 = \frac{M_2}{S_2} = \frac{M_2}{a^3/6} = \frac{6M_2}{a^3} = \frac{6M2}{\pi\sqrt{\pi}D^3/8} = \frac{48M_2}{\pi\sqrt{\pi}\,D^3}$$

چون جنس دو مقطع یکی است تنش ماکسیمم مجاز ایجاد شده در آنها نیز باید یکسان باشد.

$$\sigma_{۱} = \sigma_{۲} \rightarrow \frac{۳۲M_{۱}}{\pi D^{۳}} = \frac{۴۸M_{۲}}{\pi\sqrt{\pi}\,D^{۳}} \rightarrow \frac{M_{۲}}{M_{۱}} = \sqrt{\pi}\times\frac{۲}{۳} = \frac{۲\sqrt{\pi}}{۳}$$

مثال: نسبت تنش عمودی max برای حالت A به Bکدام است؟ (سراسری 75)





جواب:

در حالت A تنش ماکسیمم در ضلع بالا و پایین مربع رخ می دهد.

حالت A :

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{S} = \frac{M}{\frac{a^{۳}}{۶}} = \frac{۶M}{a^{۳}}$$

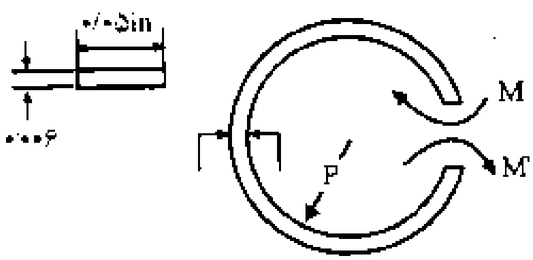
حالت B:

$$\vec{M} = M_x i + My.j = \frac{\sqrt{2}}{2} M.i + \frac{\sqrt{2}}{2} M.j$$

تنش ماکسیمم در دو گوشه مربع رخ می دهد:

$$\sigma_{\max} = \frac{\left(M\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\frac{a}{2}}{\frac{a^4}{12}} + \frac{\left(M\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\frac{a}{2}}{\frac{a^4}{12}} = \frac{6M\sqrt{2}}{a^3} \Rightarrow \frac{\sigma\max_1}{\sigma\max_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

مثال: لنگر خمشی مورد نیاز برای خم کردن ورق به ابعاد زیر حول محیط یک دایره به قطر in $\frac{3}{4}$ چه قدر است؟ (آزاد 81)



جواب:

$$\frac{1}{P} = \frac{M}{EI} \rightarrow \frac{1}{\frac{3}{8}} = \frac{M}{E\times 9\times 10^{-10}} \Rightarrow$$

$$I = \frac{0.05\times 0.006^3}{12} = 9\times 10^{-10}$$

$$M = 2.4\times 10^{-9} E$$

مقاطع مرکب تحت خمش:

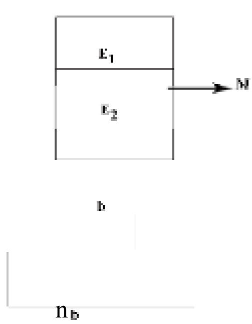
مقاطع مرکب مقاطعی هستند که از دو جنس مختلف تشکیل شده اند برای محاسبه تنشهای خمشی در این مقاطع یکی از مواد تشکیل دهنده را به عنوان مبنا انتخاب می کنیم و بقیه را به این ماده تبدیل می کنیم و به این منظور یک ضریب n به شرح زیر تعریف میکنیم:

E_1 = مدل الاستیسیته ماده ی مبنا $\qquad\qquad n=\frac{E_2}{E_1}$

E_2 = مدل الاستیسیته ماده دوم

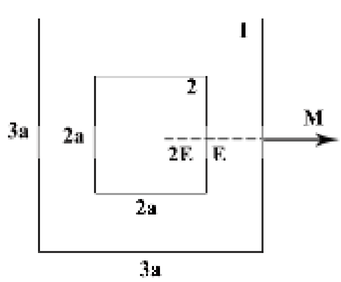
سپس در ماده دوم، بُعدی را که به موازات محور خمش قرار دارد در ضریب n ضرب میکنیم و به این ترتیب شکل جدیدی برای این مقطع بدست می آید. حال برای شکل جدید بدست آمده می توان تنش های خمشی را در نقاط مختلف به دست آورد.

تنش خمشی به دست آمده در نقاطی که شامل ماده دوم می باشد را باید در ضریب n ضرب نمود.



$$E_2 \geq E_1 \qquad\qquad n=\frac{E_2}{E_1}$$

مثال: در تیر ترکیب شکل زیر چنان چه حداکثر تنش مجاز برای هر دو نوع مصالح برابر σ_α باشد حداکثر لنگر خمشی مجاز چه قدر است؟ (سراسری 81)

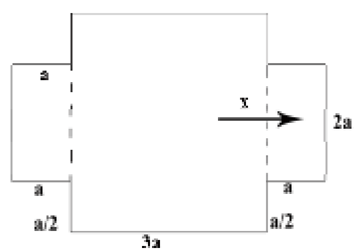


$E_{۲} = ۲E \qquad E_{۱} = E$

جواب: ماده 1 را به عنوان مبنا انتخاب کرده و ماده 2 را به آن تبدیل می کنیم.

$$n = \frac{۲E}{E} = ۲$$

چون بردار لنگر افقی است ابعاد را در راستای عرضی به موازات بردار لنگر تغییر میدهیم.پس از تغییر عرض قسمت داخلی در 2 ضرب شده و برابر 4a خواهد سد که نصف آن در همان محل قبلی آن خواهد بود و نیم دیگر از بیرون مقطع به آن اضافه میگردد. شکل مقطع پس از تبدیل مشابه شکل زیر است:



$$I = \sum \left(Ixi + A_i d_i \right)^2$$

$$I_x = \frac{3a(3a)^3}{12} + \frac{2a(2a)^3}{12} = \frac{81a^4}{12} + \frac{16a^4}{12} = \frac{97a^4}{12}$$

با توجه به آن که در هر 3 شکل محور x از مرکز ثقل 3 شکل عبور می کند، در محاسبه مقدار Ix جمله ی $A.d^2$ صفر است.

مقدار تنش ماکسیمم را در هر یک از دو ماده جداگانه محاسبه می کنیم:

$$\sigma_{\max 1} = \frac{M.3a/2}{97a^4/12} = \frac{18M}{97a^3}$$

$$\sigma_{\max 2} = \frac{n.M.y}{I_x} = \frac{2.Ma}{97a^4/12} = \frac{24M}{97a^3}$$

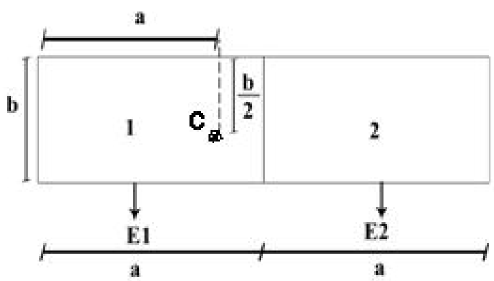
چون ماده 2 تبدیل به ماده یک شده است، در محاسبه تنش در این ماده باید ضریب n نیز اعمال گردد.

تنش ماکسیمم در ماده 2 به وجود می آید.

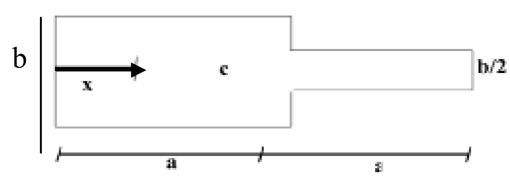
$$\frac{۲۴M}{۹۷a^{۳}} > \frac{۱۸M}{۹۷a^{۳}} \Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{۲۴M}{۹۷a^{۳}}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_{a} \Rightarrow M = \frac{۹۷a^{۳}}{۲۴}\sigma_{a}$$

مثل: **شکل رو به رو مقطع تیری را نشان می دهد که از دو جنس متفاوت 1 و 2 تشکیل شده است؛ اگر $E_1=2E_2$ باشد محل نیروی عمود بر مقطع باید در کجا باشد که در مقطع لنگر خمشی ایجاد نکند. محل اعمال نیرو در راستای عمودی وسط مقطع قرار دارد ولی در راستای افقی موقعیت آن متغیر است. (سراسری 78)**



جواب: با توجه به آنکه خروج از محوریت نقطه C حول محور y می باشد و در راستای افقی برون از مرکزیتی وجود ندارد، در صورتی که در مقطع لنگری ایجاد شود این لنگر حول محور y است و در هنگام تبدیل مقطع تغییر بعد باید در راستای محور y اعمال شود.



ماده 1 مبنا: $n = \frac{E_{۲}}{E_{۱}} = \frac{۱}{۲}$

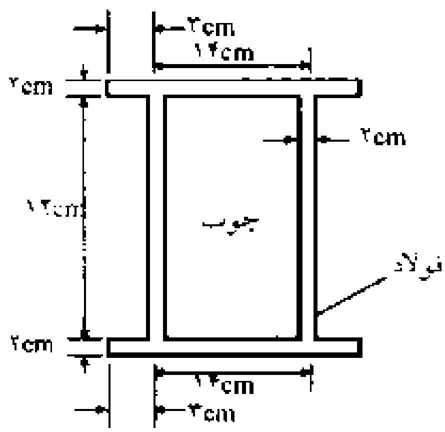
برای آنکه لنگری وجود نداشته باشد نقطه ی C باید مرکز ثقل شکل تبدیل شده باشد:

$$\bar{x}=\frac{\sum \bar{xi}.Ai}{\sum Ai}=\frac{(a.b).\frac{a}{2}+(\frac{b}{2}.a)\times(a+\frac{a}{2})}{a.b+\frac{ab}{2}}=\frac{\frac{1}{2}a^2b+\frac{3}{4}a^2.b}{\frac{3}{2}a.b}=$$

$$\frac{\frac{5}{4}.a^2.b}{\frac{3}{2}\ \ a.b}=\frac{5}{6}a=e$$

مثال: چنانچه مقطع تیر که از دو ماده فولاد و چوب تشکیل شده است تحت تاثیر لنگر خمشی M=240 KN/m قرار گیرد مقدار نیرویی که بال فوقانی تحمل می کند چه قدر است؟ (سراسری 74)

$E_S=2\times10^6\,kg/cm^2$

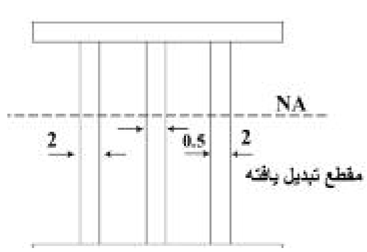


جواب: فولاد را مبنا قرار داده و چوب را به فولاد تبدیل می کنیم.

$$n=\frac{E_w}{E_s}=\frac{۱\times۱۰^۵}{۲\times۱۰^۶}=۰/۰۵$$

* لنگر را حول محور افقی فرض می کنیم.

$۱۰\times n=۱۰\times۰/۰۵=۰/۵\,cm$



چون مقطع متقارن است محور خنثی از وسط شکل می گذرد. شکل را به 5 مستطیل تقسیم می کنیم:

محاسبه ی I_x:

$$I_x = \sum xi = \sum\left(\frac{bh^3}{12} + Adi^2\right) = 2\times\frac{1}{12}\times 2\times 12^3 + \frac{1}{12}\times 0.5\times 12^3 + 2\times[\frac{1}{12}\times 20\times 2^3 + 20\times 2\times 7^2]$$

$$I_x = 4595\,cm^4$$

برای محاسبه ی نیروی اعمال شده به بال بالا متوسط تنش در بال بالا را بدست می آوریم و در مساحت آن ضرب می کنیم.

مقدار میانگین را می توان در مرکز ثقل بال بالا یعنی در وسط آن بدست آورد یا این که مقادیر تنش در قسمت بالا و پایین بال را بدست آورد و میانگین این دو مقدار را به عنوان تنش متوسط در نظر گرفت.

$$\sigma_{ave} = \frac{M.y}{I} = \frac{240\times 10^5\,N-cm\times 7}{4595} = 36561\,N-cm^2$$

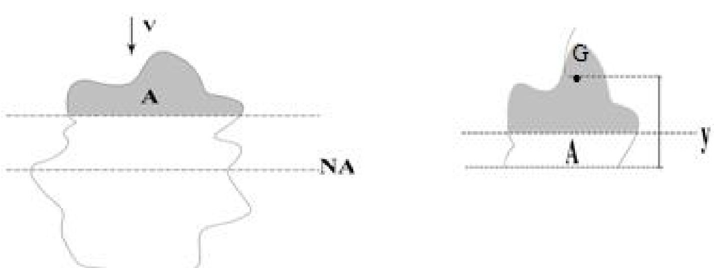
F = نیروی تحمل شده توسط بال

$$F = \sigma_{ave}\times A = 36561\times(20\times 2) = 1462440N = 1462.44KN$$

در این جا چون تنش در ماده مبنا یعنی فولاد محاسبه شده است دیگر نیازی به ضرب کردن ضریب n در تنش نیست و اگر تنش در چوب مورد نظر بود باید در انتها مقدار تنش را در ضریب n ضرب می کردیم.

تنشهای برشی

تنش های برشی از جنس تنش های داخل صفحه می باشند. در یک تیر در هر مقطع آن یک نیروی برشی وجود دارد که این نیروی برشی در مقطع ایجاد تنش هایی می کند. در حالتی که مقطع تیر در طول تیر ثابت باشد (اصطلاحاً مقطع منشوری) مقادیر تنش های برشی وارد بر تیر به شکل زیر محاسبه می شود. در شکل زیر یک مقطع از تیر با شکل دلخواهد تحت اثر یک نیروی برشی عمودی V نمایش داده شده است. میخواهیم تنش برشی در نقطه دلخواه مثل A را به دست آوریم. این مقطع همانند مقاطع تحت لنگر خمشی یک محور خنثی دارد که محور خنثای آن عمود بر راستای نیروی برشی و از مرکز سطح آن عبور میکند.



در مقطع یک مقطع ایجاد میکنیم به گونه ای که این مقطع از نقطه A عبور کند و شکل را به دو تکه تقسیم نماید. بهتر است مقطع به موازات محور خنثی ایجاد گردد (میتوان مقطع را به صورت کج و یا حتی خط شکسته هم ایجاد نماییم، ولی بهترین حالت در صورت امکان ایجاد مقطع به موازات محور خنثی است). یکی از دو قسمت ایجاد شده در مقطع را انتخاب مینماییم. در شکل بالا به طور مثال تکه بالای مقطع که هاشور خورده است انتخاب شده است (منعی برای انتخاب تکه پایین آن هم وجود ندارد. بهتر است تکه ای را انتخاب نماییم که شکل ساده تری داشته باشد). ممان اول اینرسی تکه انتخاب شده از

مقطع حول محور خنثای کل مقطع محاسبه میشود و با Q نمایش داده میشود. ممان اول اینرسی یک مقطع برابر حاصلضرب مساحت مقطع در فاصله مرکز سطح آن تا محور مورد نظر است. برای اشکالی که محاسبه مرکز سطح آنها مشکل است میتوان شکل را به چند تکه کوچکتر تقسیم کرده و برای هر تکه ممان اول سطح را محاسبه کرده و با هم جمع بست. حال میتوانیم مقدار تنش برشی متوسط در مقطع در قسمت برش خورده (که نقطه A نیز جزیی از آن است) را با استفاده از رابطه زیر محاسبه کنیم:

$$\tau = \frac{V.Q}{I_{NA}.t}$$

I_{NA}: ممان دوم اینرسی حول محورخنثی

t: عرض برش خورده در مقطع

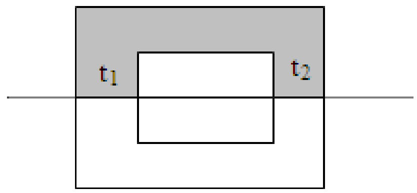
Q: ممان اول اینرسی شکل هاشورخورده حول محور خنثی

$\tau =$ میانگین تنش برش خورده در مقطع هاشور خورده

نکته 1: در محاسبه ی Q اگر قطعه انتخاب شده شکل مرکبی داشته باشد می توان آن را به چند شکل ساده شده تقسیم نمود و برای هر شکل ساده شده مقدار Q را محاسبه و با هم جمع نمود . $Q = \sum Qi = \sum(A_i\ y_i)$

در رابطه بالا Ai مقدار سطح مقطع تکه iام از شکل و yi فاصله مرکز سطح تکه iام تا محور خنثای کل شکل است.

نکته 2: در محاسبه ی t فقط عرض قسمت هایی که برش می خورد را در نظر می گیریم و به طور مثال اگر در مقطع برش قسمت هایی به صورت سوراخ وجود داشته باشد که در مقطع برش نخورند عرض آن قسمت ها در محاسبه tمحسوب نمی شود.



$t=t_1+t_2$

نکته 3: تنشی که به این روش بدست می آید میانگین تنش در قسمت برش خورده میباشد و در حالتی که مقطع برش را به صورت موازی محور خنثی در نظر بگیریم در اکثریت موارد مقدار تنش در مقطع برش خورده تقریباً یکنواخت می باشد و مقدار تنش بدست آمده را می توان به هر نقطه ی دلخواه ازعرض مقطع برش خورده نسبت داد.

پس به این جهت بهتر است مقطع برش را معمولاً موازی محور خمشی در نظر بگیریم.

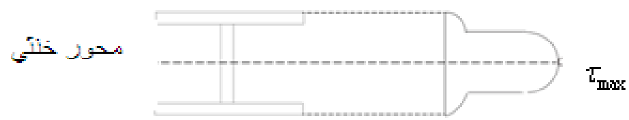
نکته 4: در بالاترین و پایین ترین نقاط مقطع با توجه به صفر بودن مقدار Q تنش برشی صفر است.

در محور خنثی مقدار عبارت V.Q/I , ماکسیمم است. حال اگر مقدار t نسبت به بقیه نقاط مقطع بیشتر باشد، تنش برشی نیز در محور خنثی ماکسیمم می شود.

بر این اساس در مقاطع با عرض ثابت نظیر مستطیلی یا مقاطعی که در محور خنثی عرض کم می شود نظیر مقاطع I شکل مقدار تنش ماکسیمم در محور خنثی رخ می دهد. در برخی مقاطع دیگر نظیر دایره نیز هر چند عرض مقطع در محور خنثی بیشینه است اما باز هم در تنش برشی بیشینه در محور خنثی رخ می دهد. در برخی مقاطع دیگر مثل مثلث و لوزی که عرض مقطع روی محور خنثی مینیمم نیست مقدار تنش برشی بر روی محور خنثی نخواهد بود. به طور مثال در مقطع مثلثی تنش ماکسیمم بر روی وسط ارتفاع مقطع رخ میدهد؛ در حالی که محور خنثی به فاصله یک سوم ارتفاع از قاعده مثلث قرار دارد. برای مقطع لوزی نیز مقدار تنش برشی ماکسیمم در دو نقطه به فاصله یک چهارم

ارتفاع مقطع در بالا و پایین محور خنثی و به میزان 1.5 برابر تنش برشی میانگین رخ میدهد.

نکته 5: در مقاطعی که عرض مقطع در نقاطی خاص از آن به یک باره زیاد یا کم میشود، تنش برشی بر خلاف آن به یکباره کم یا زیاد می شود و به طور مثال در مقطع I شکل در محل اتصال جان به بال این مساله دیده می شود.



نمودار توزیع تنش در ارتفاع مقاطع

نکته 6: همانطور که در ابتدا نیز اشاره شد روش و رابطه ارایه شده در این بخش تنها برای محاسبه تنش برشی در تیرها با مقطع منشوری (مقطع ثابت در طول تیر) دارای اعتبار است و برای حالات دیگر نمیتوان از این روش استفاده کرد.

تنش برشی میانگین

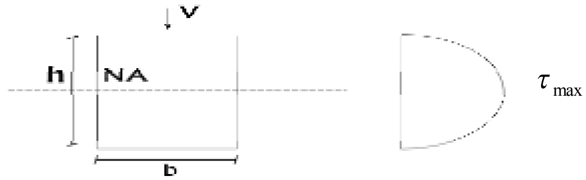
تنش برشی میانگین نشاندهنده مقدار متوسط تنش برشی در یک مقطع است و با تقسیم مقدار نیروی برشی بر کل مساحت مقطع به دست می آید.

مساحت مقطع : A

$$\tau_{ave} = \frac{V}{A}$$

بین تنش برشی ماکسیمم و تنش برشی میانگین میتوان یک نسبت برای هر مقطع با شکل خاص معرفی نمود. به طور مثال، در مقطع مستطیلی و مثلثی تنش برشی ماکسیمم 1.5 برابر و در مقطع دایره ای $\frac{۴}{۳}$برابر تنش برشی میانگین می باشد.

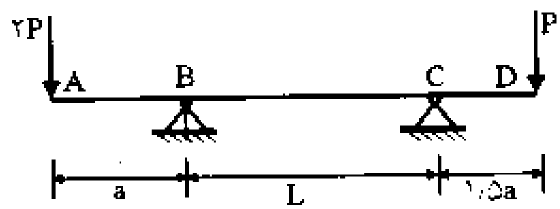
مستطیل: $T_{\max} = \frac{1/5v}{b.h} = 1.5\tau_{ave}$



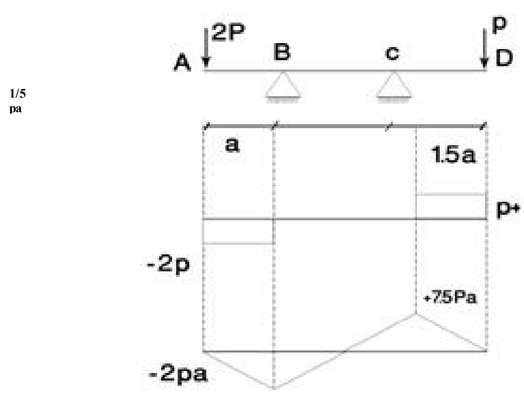
به عنوان مثال مقدار در اینجا مقدار تنش برشی ماکسیمم برای مقطع مستطیلی به عرض b و ارتفاع h تحت اثر برش عمودی V را به دست می آوریم:

$$\tau_{\max} = \frac{VQ}{I_{NA}t} = \frac{V\left(\frac{h}{2}b\right)\frac{h}{4}}{\frac{1}{12}bh^3} = \frac{3V}{2bh} = 1.5\tau_{ave}$$

مثال: در شکل مقابل سطح مقطع در تمام طول تیر ثابت و مستطیلی میباشد. مقادیر $\frac{(\sigma_{\max})AB}{(\sigma_{\max})CD}, \frac{(\tau_{\max})AB}{(\tau_{\max})CD}$ نسبتهای چقدر است؟ (سراسری 81)



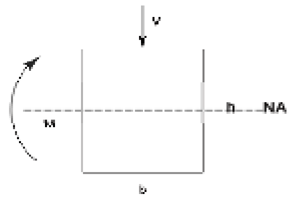
جواب: دیاگرام برش و خمش در تکه های AB, CD را رسم می کنیم نیازی به رسم این دیاگرام ها در تکه BC نیست



به این ترتیب مقادیر برش و لنگر بیشینه در تکه های CD,AB به شرح زیر می شود:

$$\left(V_{\max}\right)_{AB} = \text{۲}P\ ,\ \left(V_{\max}\right)_{CD} = P$$
$$\left(M_{\max}\right)_{AB} = \text{۲}Pa\ ,\ \left(M_{\max}\right)_{CD} = \text{۱.۵}Pa$$

برای مقطع مستطیلی داریم :

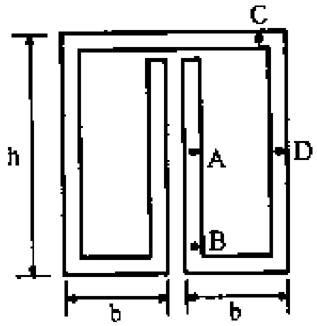


$$\tau_{\max} = \frac{1.5V}{b.h}\ ,\ \sigma_{\max} = \frac{6M}{bh^2}$$
$$\sigma_{\max} = \frac{M}{S}\ ,\ S = bh^2/6$$

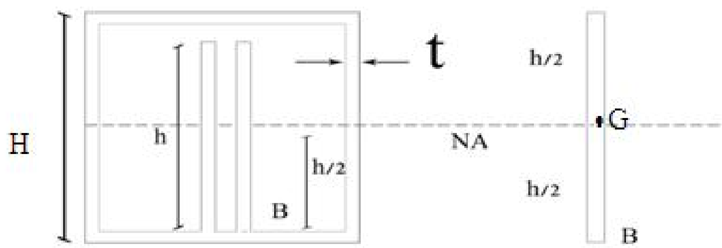
حال خواهیم داشت:

$$\left(\sigma_{\max}\right)_{AB} = \frac{6\left(M_{\max}\right)_{AB}}{bh^2} = \frac{6\times 2Pa}{bh^2} = \frac{12pa}{bh^2}$$
$$\Rightarrow \frac{\sigma_{\max AB}}{\sigma_{\max CD}} = \frac{\frac{12Pa}{bh^2}}{\frac{9pa}{bh^2}} = \frac{4}{3}$$
$$\left(\sigma_{\max}\right)_{CD} = \frac{6\left(M_{\max}\right)_{CD}}{bh^2} = \frac{6\times 1.5pa}{bh^2} = \frac{9pa}{bh^2}$$
$$\left(\tau_{\max}\right)_{AB} = \frac{1.5\times 2p}{bh} = \frac{3p}{bh}$$
$$\left(\tau_{\max}\right)_{CD} = \frac{1.5p}{bh} \qquad \Rightarrow \frac{\left(\tau_{\max}\right)_{AB}}{\left(\tau_{\max}\right)_{CD}} = \frac{\frac{3p}{bh}}{\frac{1.5p}{bh}} = 2$$

مثال: مقدار تنش برشی در نقطه ی B از شکل زیر چه قدر است؟ شکل نسبت به محور افقی متقارن است. (سراسری 81)



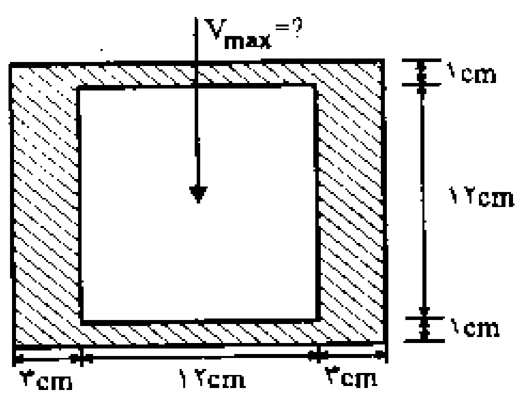
جواب:



شکل را در نقطه B برش می زنیم. لازم نیست تمام شکل برش بخورد و حداقل برشی که شکل را دو تکه کند و از نقطه مورد نظر عبور کند کفایت می کند. در تکه جدا شده مرکز ثقل روی محور خنثی می باشد پس Q صفر است و تنش برشی نیز صفر می شود.

$y = 0 \Rightarrow Q = 0 \Rightarrow \tau_B = 0$

مثال: در مقطع شکل مقابل چنانچه تنش مجاز برشی $960\ Kg / cm^2$ باشد ظرفیت برش قائم مقطع چه قدر است؟ (سراسری 81) $\tau_{all} = 960 kg / cm^2$



جواب:

در مقطع بالا تنش برشی ماکسیمم را محاسبه کنیم. معمولاً برشی ماکسیمم در جایی رخ می دهد که محور خنثی از آن عبور کرده باشد یا ضخامت مقطع حداقل باشد. در این جا دو نقطه را امتحان می کنیم؛ نقطه A روی محور خنثی و نقطه ی B روی محل اتصال جان به بال که کمترین ضخامت را دارد.

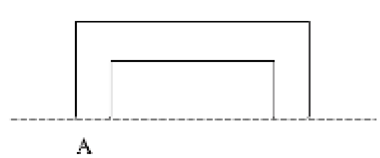
برای شروع ممان دوم اینرسی شکل را محاسبه میکنیم. چون شکل متقارن است محور خنثای شکل از وسط آن عبور می کند و برای محاسبه ممان دوم اینرسی شکل را به دو مستطیل تقسیم می کنیم که مستطیل دوم از مستطیل اول کم می شود.

محاسبه ی I_{NA}:

$$I_{NA} = \frac{1}{12} \times 18 \times 14^3 - \frac{1}{12} \times 12 \times 12^3 = 2388\, cm^4$$

حال تنش در نقطه A را محاسبه میکنیم. برای این منظور در محور خنثی که نقطه A بر ر وی آن قرار دارد یک مقطع افقی میزنیم به شکل به دو تکه تقسیم گردد. یکی از دو تکه را انتخاب میکنیم. در اینجا دو تکه کاملاً مشابه هم هستند و ما تکه بالا را انتخاب میکنیم.

برای محاسبه Q، شکل را به 3 قسمت تقسیم می کنیم:

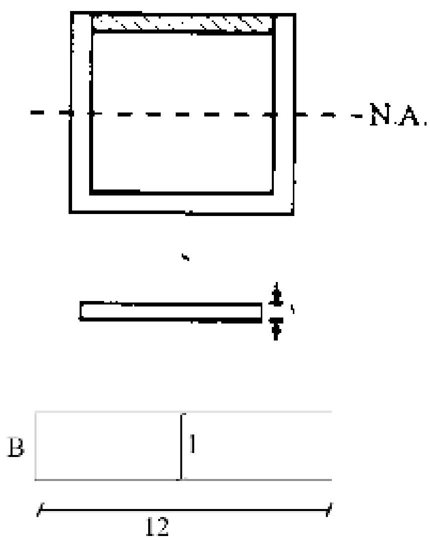


$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 2 \times (3 \times 7) \times \frac{7}{2} + 12 \times 1 \times 6.5 = 225\, Cm^3$$

$$t = 3 + 3 = 6 \qquad \tau_A = \frac{V_{\max} . Q_A}{I_{NA}} = \frac{V_{\max} \times 225}{2388 \times 6} = 0.0157\ V_{\max}$$

در این حالت مقدار t با توجه به اینکه تنها دو جان مقطع برش خورده اند برابر 6 سانتیمتر خواهد بود

حال به سراغ حالت دوم و نقطه B در محل تقاطع جان و بال مقطع میرویم. در این حالت برش مقطع از دو قسمت اتصال بال به جان انجام میگردد، به گونه ای که بال مقطع از دو طرف از جان آن جدا گردد. (همانطور که قبلاً نیز اشاره شد لزومی ندارد که مقطع با یک خط راست ایجاد گردد و ایجاد مقطع به این شکل هم میتواند قابل قبول باشد).



مقدار Q در این حالت با جدا کردن قسمت هاشور زده در شکل بالا و به شرح زیر قابل محاسبه است:

$$Q = 12 \times 1 \times 6.5 = 78\,Cm^3 \qquad t = 1 + 1 = 2$$

$$\tau_B = \frac{V_{\max} . Q_B}{I_{NA} . t} = \frac{V_{\max} \times 78}{2388 \times 2} = 0.0163 V_{\max}$$

در محاسبه t با توجه به اینکه مقطع از دو قسمت چپ و راست و به میزان ضخامت بال زده شده است، مقدار ضخامت بال را در عدد 2 ضرب میکنیم.

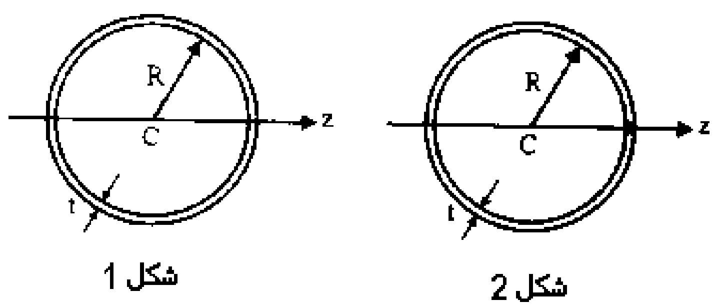
در این حالت مقدار تنش برشی به دست آمده بیشتر از حالت اول است و در نتیجه حالت دوم بحرانیتر است

$$0.0157V \leq 0.0163V$$

در نتیجه خواهیم داشت:

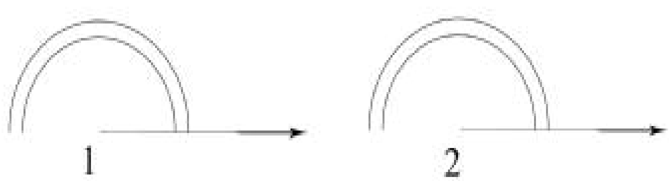
$$0.0163V_{\max} = \tau_{all} = 960 \Rightarrow V_{\max} = \frac{960}{0.0103} = 58895N = 58.895KN$$

مثال: دو مقطع نشان داده شده در شکل زیر دارای ابعادی مشابه می باشند؛ جز آن که در شکل 2 مقطع بر روی محور z جدار آن به هم چسبیده و پیوسته نیست. تحت یک نیروی برشی مساوی تنش برشی ماکسیمم در حالت 1 چند برابر حالت 2 است؟ (سراسری 80)



جواب:

در دو حالت برش ماکسیمم روی محور خنثی یعنی محور Z رخ می دهد.



$V_1 = V_2 \qquad I_1 = I_2$

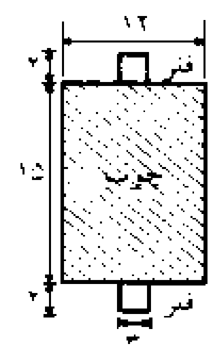
$Q_1 = Q_2 \qquad t_1 = 2t \qquad t_2 = t$

$$\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\frac{V_1 Q_1}{I_1 . 2t}}{\frac{V_2 . Q_2}{I_2 . t}} = \frac{1}{2}$$

در هر دو حالت مقدار نیروی برشی، ممان دوم اینرسی و Q با هم یکسان است و تنها مقدار t است که متفاوت است. در حالت دوم با توجه به اینکه روی محور Z تنها یکی از دو جداره مقطع برش میخورد، مقدار t نصف حالت اول است. به این ترتیب مقدار تنش برشی ماکسیمم در حالت اول نصف حالت دوم است.

مثال: مقطع مختلط از چوب و فلز مطابق شکل مفروض است، اگر دو قطعه فلزی 2×3cm در بالا و پایین چوب توسط چسب در تمام طول تماس خود به چوب متصل شده باشند، تنش در چسب ناشی از برش V=4 ton چه قدر است؟ (سراسری 79)

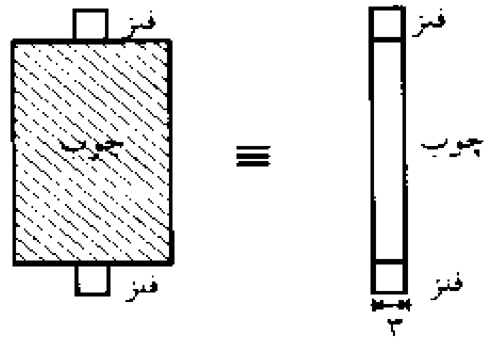
(مدول الاستیسیته فولاد 4 برابر چوب است $\frac{E_w}{E_s} = \frac{1}{4}$)



جواب:

فلز را مبنا و چوب را به آن تبدیل می کنیم. در این فرآیند عرض قطعه چوبی در عدد یک چهارم ضرب شده و از 12 به 3 سانیتمتر تقلیل می یابد. (n=0.25)

با توجه به اینکه عرض قسمت فلزی هم قبلاً 3 سانیتمر بوده ، مقطع به شکل یک مستطیل در می آید.



برای محاسبه مقدار تنش در چسب در محلی که چسب قرار دارد، یعنی در مرز فلز و چوب در مطع تبدیل یافته یک برش میزنیم تا مقطع به دو تکه تبدیل گردد.

$$Q = 3 \times 2 \times 8.5 = 51\,Cm^3$$

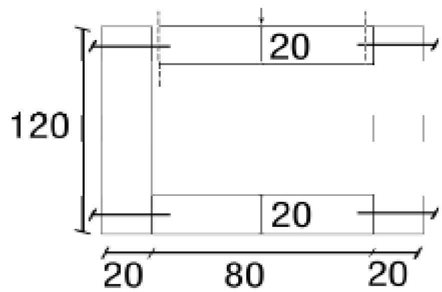
$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{3 \times 19^3}{12} = 1715\,Cm^4 \qquad \ell = \frac{V.Q}{I.E} = \frac{4000 \times 51}{1751 \times 3} = 39.65\,{}^{kg}\!/_{cm^2}$$

چون تنش در مقطعی محاسبه می شود که عرض آن پس از تبدیل تغییر نکرده است نیازی به اعمال ضریب n به تنش بدست آمده نیست.

نکته: در مقاطعی که حالت مرکب دارد و از اتصال چند قطعه با وسایل اتصال نظیر چسب، جوش و پیچ و پرچ به هم متصل می شوند، می توان با کمک فرمول تنش برشی مقدار نیرو یا تنش در وسایل اتصال را بدست آورد. در این حالت اگر وسایل اتصال جوش چسب یا موارد مشابه باشد، در فرمول تنش برشی به جای t عرض جوش یا چسب جایگزین می شود و اگر وسیله اتصال مواردی نظیر پیچ و پرچ باشد در فرمول دیگر t را قرار نمی دهیم و فرمول به صورت $\frac{V.Q}{I}$.در می آید. مقدار به دست آمده در اینجا نشاندهنده نیروی وارده بر وسایل اتصال در واحد طول قطعه می باشد که با توجه به

تعداد وسایل اتصال موجود در واحد طول (در راستای طولی تیر) سهم هر یک از وسایل اتصال از این نیرو بدست می آید. در صورتی که جهت اتصال از جوش یا چسب به صورت منقطع استفاده شده باشد، مقدار تنش برشی در وسیله اتصال زیاد میشود و باید مقدار به دست آمده را به نسبت طول اتصال به کل طول قطعه تقسیم کرد. مثلاً اگر در هر نیم متر 20 سانتیمتر ما طول اتصال با جوش یا چسب داشته باشیم ، باید مقدار تنش را بر ضریب 0.4 تقسیم کنیم تا نیروی تحمل شده توسط واحد طول جوش یا چسب محاسبه گردد.

مثال: **در مقطع مقابل فاصله ی بین میخ ها در جهت طولی 30 mm می باشد. در صورت وارد شدن نیروی برشی 1200 N، نیروی وارد بر هر میخ چه قدر است؟** (آزاد 82) **(اندازه ها بر حسب میلیمتر میباشند)**

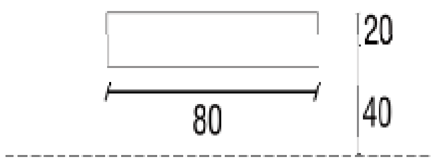


جواب: ابتدا ممان دوم اینرسی شکل را محاسبه می کنیم. با توجه به تقارن محور خنثیی از وسط شکل عبور می کند. شکل را به صورت یک مربع 120 × 120 که یک مربع 80 × 80 از آن کم شده است در نظر می گیریم.

$$I = \frac{120}{12} \times 120^3 - \frac{80 \times 80^3}{12} = 13866667 \ mm^4$$

با توجه به تقارن نیرو در میخ ها با هم مساوی است.

مقطع باید در محل اتصال قطعات با هم ایجاد گردد به طور مثال یک مقطع در قسمت بالا در محل اتصال دو قطعه ایجاد می گردد؛ به گونه ای که بال مقطع از محل اتصال میخها از جان مقطع جدا گردد. در این حالت بال مقطع به ابعاد 80در20 میلیمتر به دست می آید. فاصله مرکز ثقل این قطعه تا محور خنثی 50 میلیمتر خواهد بود.



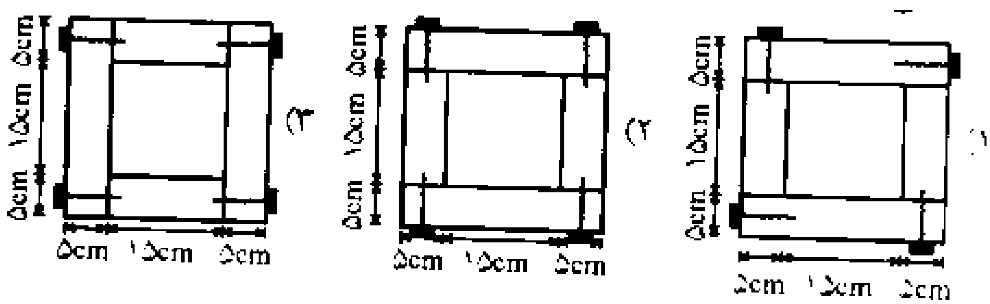
$$Q = 80 \times 20 \times 50 = 80000\,mm^3$$
$$\frac{V.Q}{I} = \frac{1200 \times 80000}{13866667} = 6.92\frac{N}{mm}$$

مقداری که در بالا به دست آمد مقدار نیرویی است که باید 1 میلیمتر از اتصال تحمل نماید. با توجه به آنکه در مقطع ایجاد شده دو ردیف میخ در چپ و راست مقطع وجود دارد ، برای به دست آمدن سهم هر ردیف از اتصال باید مقدار به دست آمده را بر دو تقسیم نماییم. غیر از آن باید توجه کرد که این نیرو سهم هر میلیمتر از اتصال است و ما در اینجا میخها را به فواصل هر 30 میلیمتر نصب کرده ایم. یعنی هر میخ سهم نیروی 30 میلیمتر را در خود جمع کرده و باید تحمل نماید. پس باید عدد به دست آمده را در عدد 30 نیز ضرب کنیم تا نیروی تحمل شده توسط هر میخ به دست آید.

نیروی موجود در هر میخ= $\frac{6.92 \times 30}{2} = 103.8N$

اگر فاصله کم شود نیرو نیز کم می شود.

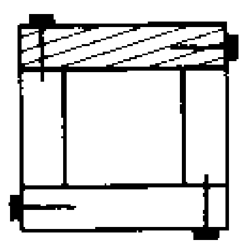
مثال: کدام یک از حالت ها برای ساختن یک تیر ساده با مقطع قوطی شکل تعداد میخ های کمتری در واحد طول احتیاج دارد؟ (سراسری 72)



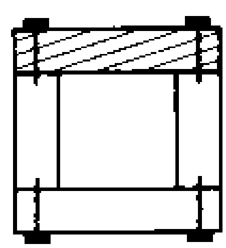
جواب: برای آن که تعداد میخ کمتری نیاز باشد باید در مقاطع اتصال مقدار $\frac{VQ}{I}$ (یعنی مقدار نیروی وارد بر واحد طول اتصال) حداقل باشد. بین 2 حالت 1 و2 حالت 2 بهتر است. باید توجه کرد که در حالت 1 دو میخ افقی نقشی در اتصال قطعات ندارد و عملاً می توان آنها را حذف کرد. با توجه به تشابه کامل دو شکل 1 و 2 و این که در شکل 2 هر 4 میخ در اتصالات موثرند در این حالت نسبت به حالت 1 فاصله میخ ها دو برابر خواهد شد.

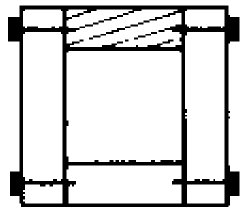
بین دو حالت 2 و 3 در صورتی که در مقطع اتصال برش بزنیم، سطح مقطع بدست آمده درحالت 3 کوچکتر خواهدبود ودر نتیجه مقدار Q و به تبع آن $\frac{VQ}{I}$در حالت 3 کمتر است. توجه کنید که در سه حالت مقدار V و I ثابت است و تنها Q است که متفاوت است.

(۱)



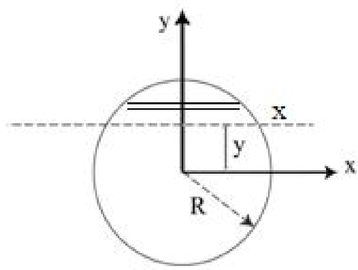
(۲)



(۳) 

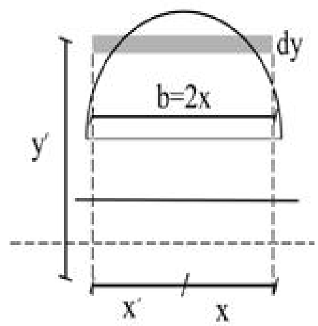
مثال: در مقطع دایره ای تنش برشی ماکسیمم کجا رخ می دهد و مقدار آن چند برابر تنش میانگین است؟

جواب:



با توجه به آن که عرض مقطع در محور خنثی بیشتر از بقیه قسمت های آن است ممکن است تنش برشی ماکسیمم در محور خنثی رخ ندهد.

نقطه ای دلخواه به فاصله y از محور خنثی را انتخاب می کنیم و تنش برشی در این نقطه را محاسبه می کنیم و y را به گونه ای پیدا می کنیم که تنش برشی بیشینه در نقطه مورد نظر رخ دهد. در فاصله y از مرکز دایره به موازات افق یکِ مقطع افقی میزنیم تا دایره به دو قسمت تقسیم شود و قطعه بالای آن را انتخاب میکنیم.



حال برای محاسبه مقدار Q برای این قطعه، در آن المانهایی افقی به صورت مستطیلی ایجاد کرده و برای این المان کوچک مقدار گشتاور اول سطح را به دست می آوریم. مقدار گشتاور اول سطح برای این المان برابر حاصلضرب مساحت المان در فاصله عمودی آن تا محور خنثی (که بر مرکز دایره منطبق است) خواهد بود. مقدار فاصله عمودی تا محور خنثی را با y' نمایش میدهیم. اگر از مقدار به دست آمده در فاصله y تا R انتگرالگیری نماییم مقدار Q به دست خواهد آمد.

باید توجه کرد که هر نقطه از دایره دایره یک مختصات X و Y خواهد بود. مطابق رابطه فیثاغورث با توجه به آنکه مقادیر X و Y و R تشکیل یک مثلث قائم الزاویه میدهند، میتوان نوشت:

$$X^2 + Y^2 = R^2 \qquad \rightarrow X = \sqrt{R^2 - Y^2} \qquad I_X = I_Y = \frac{\pi R^4}{4}$$

برای محاسبه مساحت المان باید عرض المان را بدانیم. اگر این عرض را با b نمایش دهیم، این عرض دو برابر x نقطه از دایره است که با این المان متقاطع است. خواهیم داشت:

$$b = 2X = 2\sqrt{R^2 - y'^2} \qquad\qquad R^2 - y'^2 = u$$

$$du = u' = -2y'dy' \Rightarrow 2y'dy' = -du$$

$$Q = \int_y^R 2\sqrt{R^2 - y'^2} \times y'dy'$$

$$= \int_y^R -\sqrt{u}du = \left[-\frac{2}{3}u\sqrt{u}\right] = \left[-\frac{2}{3}\left(R^2 - y'^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_y^R$$

$$= -\frac{2}{3}\left[0 - \left(R^2 - y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right. = \frac{2}{3}\left(R^2 - y^2\right)^{\frac{3}{2}} = Q$$

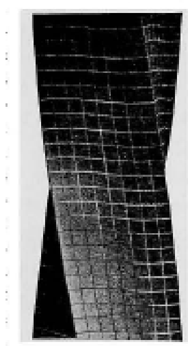
$$t = 2x = 2\sqrt{R^2 - y^2} \qquad \tau = \frac{VQ}{It} = \frac{V \times \frac{2}{3}\ \left(R^2 - y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{I \times 2\left(R^2 - y^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{V\left(R^2 - y^2\right)}{3I}$$

این عبارت وقتی ماکسیمم است که y=0 باشد. یعنی تنش برشی بر روی محور خنثی است که ماکسیمم میشود. با قرار دادن y=0 خواهیم داشت:

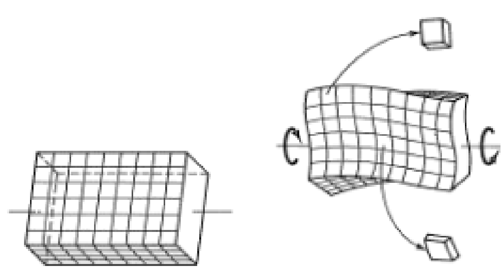
$$y = 0 \qquad \tau_{\max} = \frac{VR^2}{3 \times \frac{\pi r^4}{4}} = \frac{4V}{3\pi R^2} = \frac{4V}{3A} = \frac{4}{3}\tau_{ave}$$

پیچش

تنش های پیچشی از نوع تنش های داخل صفحه می باشند و مشابه تنش های برشی هستند. پیچش باعث تغییر شکل مقطع می شود. در مقاطع دایره ای به صورت تو پر یا تو خالی پیچش تنها باعث دوران مقطع حول محور طولی جسم می گردد. اما در بقیه مقاطع پیچش باعث ایجاد اعوعاج در مقطع می شود به گونه ای که مقطع دیگر از شکل اولیه خود خارج می شود. در شکل زیر یک مقطع غیر دایره ای پس از اعمال پیچش را از راستای طولی نمایش میدهد:



شکل زیر هم نمونه دیگری است که یک مقطع مستطیلی تحت پیچش قبل و بعد از اعمال پیچش را نشان میدهد:



(a) (b)

تنشهای پیچشی در مقاطع دایره ای:

در مقاطع دایره ای (توخالی یا توپر) توزیع تنش در مقطع به صورت خطی است میزان تنش در مقطع بستگی به مقدار فاصله هر نقطه از مقطع تا مرکز دایره دارد. بر این اساس تنش ماکسیمم بر روی محیط خارجی دایره رخ خواهد داد. در هر نقطه دلخواه مقدار تنش برشی ناشی از لنگر پیچشی با استفاده از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\tau = \frac{T.\rho}{J}$$

T: مقدار لنگر پیچشی

ρ =فاصله نقطه ی مورد نظر تا مرکز دایره

ممان اینرسی قطبی مقطع: j

مقدار ممان اینرسی قطبی هم به شرح زیر محاسبه میشود:

$$j = I_x + I_y$$

برای مقاطع دایره توپر، دایره توخالی و دایره با جدار نازک مقدار J به ترتیب به شرح زیر محاسبه میشود:

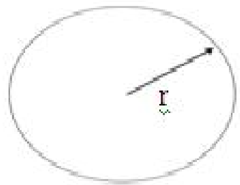
دایره توپر: $j = \frac{\pi R^4}{2}$

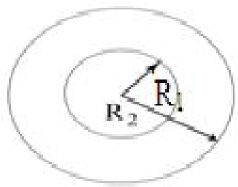
دایره توخالی: $j = \frac{\pi}{۲}\left(R_{۲}^{۴} - R_{۱}^{۴}\right)$

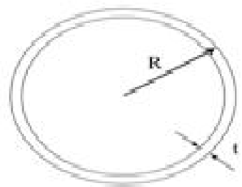
دایره با مقطع جدارنازک (به همراه اثبات رابطه):

$$j = \frac{\pi}{2}\left(R_2^{4} - R_1^{4}\right) = \frac{\pi}{2}\left(R_2 - R_1\right)\left(R_2 + R_1\right)\left(R_2^{2} + R_1^{2}\right)$$
$$= 2\pi t R^3$$

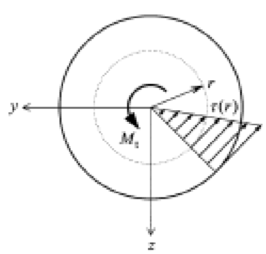
$$R_2 = R_1$$
$$R_2 - R_1 = t$$



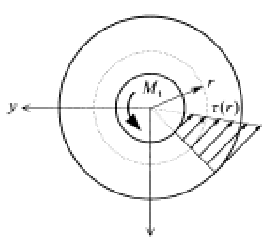




در شکل زیر نیز توزیع تنش برشی ناشی از پیچش در راستای یکی از شعاعهای دایره نمایش داده شده است:



شکل زیر هم به طور مشابه برای یک مقطع دایره ای توخالی میباشد. مقدار تنش در جداره داخلی مینیمم و در جداره خارجی مقطع ماکسیمم است.



میزان دوران ایجاد شده در یک میله با مقطع ثابت تحت لنگر پیچشی ثابت با فرمول زیر محاسبه می شود:

$$\Phi = \frac{T.\ell}{j.G}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

G: مدول الاستیسیته برشی

ℓ: طول میله

Φ: زاویه دوران بر حسب رادیان

اگر در طول میله، مقدار لنگر پیچشی یا جنس میله و یا مقطع آن تغییر کند، دیگر از رابطه بالا نمی توان مقدار تغییر زاویه را بدست آورد و در این حالت میله را باید به چند میله ساده تر با جنس، لنگر پیچشی و مقطع ثابت تقسیم کرد و در هر تکه تغییر زاویه را با فرمول بالا محاسبه و با هم جمع می کنیم.

$$\Phi = \sum \Phi_i = \sum \frac{T_i.\ell_i}{j_i.G_i}$$

اگر مقطع به صورت متغیر باشد باید از روش انتگرال گیری استفاده کنیم.

$$\Phi = \int_{x=0}^{x=\ell} \frac{T.dx}{j.G}$$

کرنش برشی ناشی از پیچش:

در اثر لنگر پیچشی نیز همانند بحث خمش و نیروهای محوری وبرشی ، یک کرنش در مقطع ایجاد میگردد. این کرنش از جنس کرنشهای برشی و داخل صفحه بوده و مقدار آن ااز رابطه ی زیر محاسبه می شود.

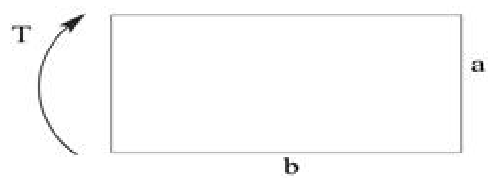
$$\gamma = \frac{\rho.\Phi}{\ell}$$

ρ: فاصله نقطه تا مرکز دایره.

بیشترین کرنش برشی در جداره بیرونی مقطع رخ می دهد.

مقاطع مستطیلی:

در مقاطع مستطیلی همانطور که ابتدا نیز اشاره شد، علاوه بر دوران مقطع دچار اعوجاج هم میشود. برای محاسبه تنشهای برشی دیگر از روابط قسمت قبلی نمیتوان استفاده کرد. در این حالت تنش برشی ماکسیمم در وسط ضلع بزرگتر رخ می دهد. برای محاسبه تنش و زاویه دوران میتوان از روابط زیر استفاده نماییم:

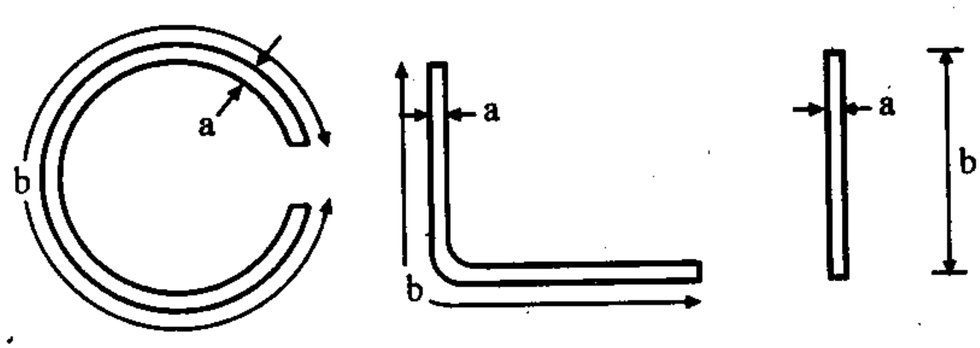


$$\tau_{\max} = \frac{T}{C_1.b.a^2} \qquad \Phi = \frac{T.\ell}{C_2.b.a^3.G}$$

در روابط فوق C_2 , C_1 تابعی از a , b می باشند. برای مقاطع با نسبت $10 < b/a$ مقدار C_2 , C_1 را برابر یک سوم (0.33) می توان فرض کرد.

از دو رابطه ی بالا برای مقاطع جدار نازک باز نیز می توان استفاده کرد.

b همیشه عدد بزرگتر است.

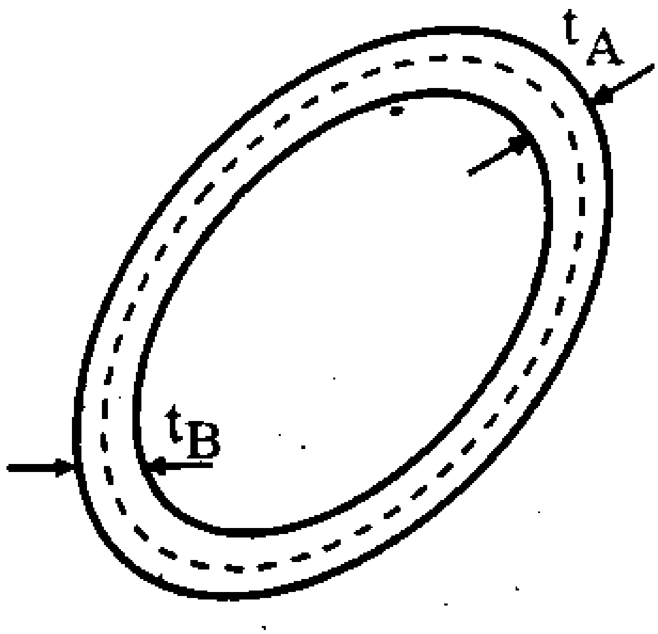


در مقاطع خمیده یا شکسته همانند شکل بالا به جای b مجموع طول شکل را جایگزین میکنیم.

اگر در طول قطعه ضخامت متغیر باشد آن را چند تکه کرده و برای هر تکه مقدار $C_1.b.a^2$ یا $C_2.b.a^3$ را جداگانه حساب کرده و با هم جمع می کنیم.

مقاطع جدا نازک بسته:

در مقاطع جدار نازک بسته حاصل ضرب تنش برشی در ضخامت قطعه در هرنقطه از جدار مقداری ثابت است.



$$t_A.\tau_A = t_B.\tau_B$$

اگر ضخامت قطعه ثابت باشد، مقدار تنش نیز در نقاط مختلف جدار برابر خواهد بود. اگر ضخامت متغیر باشد، مقدار تنش در قسمت هایی که ضخامت بیشتر است تنش کمتر است. اگر ضخامت ثابت باشد مقدار تنش برشی از رابطه ی زیر محاسبه می شود:

$$\tau = \frac{T}{2t.A}$$

t: ضخامت جداره

T: لنگر پیچشی.

A: مساحت سطح محدود به خط مرکزی جداره

اگر ضخامت متغیر باشد در فرمول بالا ضخامت جدار در نقطه ای را قرار می دهیم که می خواهیم تنش در آن را حساب کنیم.

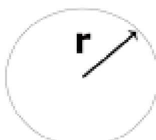
مقدار تغییر زاویه در مقطع نیز از فرمول زیر محاسبه می شود:

$$\Phi = \frac{T.\ell}{4A^2.G}\oint \frac{ds}{t}$$

$\oint \frac{ds}{t}$ ، انتگرال گیری روی جداره سطح بسته می‌باشد.

اگر t مقدارش ثابت باشد انتگرال ds برابر محیط مقطع می‌شود.

مثال: میله ای که مقطع آن دایره ای است، زیر لنگر پیچشی T دارای تنش برشی ماکسیمم 40MPa می باشد. اگر همین میله زیر لنگر خمشی M که مقدار آن مساوی T است قرار گیرد تنش برشی ماکسیمم آن چه قدر می شود؟ (سراسری 82)



جواب:

$$\tau_{\max} = \frac{T.r}{j} = \frac{T.r}{\frac{\pi r^4}{2}} = \frac{2Tr}{\pi r^4} = 40 \Rightarrow \frac{T}{\pi r^3} = 20$$

$$M = T$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{S} = \frac{M}{\frac{\pi r^3}{4}} = \frac{4M}{\pi r^3}$$

$$c = r$$

$$S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{\pi r^4}{4}}{r} = \frac{\pi r^3}{4}$$

مقداری که در بالا برای تنش ماکسیمم ناشی از خمش به دست آمده است، تنش ماکسیمم عمودی است و از جنس تنشهای برشی نیست. اما از قسمتهای قبل به یاد داریم که اگر یک المان تحت یک تنش خالص محوری قرار گیرد، با دوران به میزان 45 درجه تحت یک تنش برشی خالص به میزان نصف تنش خالص محوری خواهد بود. پس اگر ما بخواهیم

تنش برشی ماکسیمم ناشی از یک لنگر خمشی را به دست آوریم، کافیست که تنش عمودی به دست آمده را نصف کنیم. پس برای حالت دوم داریم:

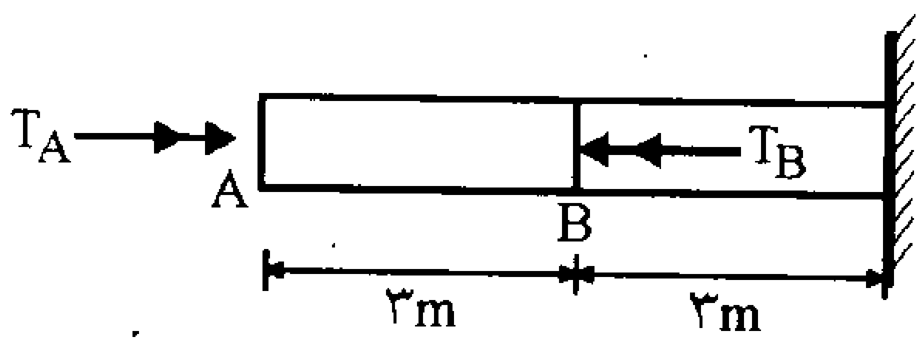
$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}\sigma_{\max} = \frac{2M}{\pi r^3}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\tau_{\max} = \frac{2M}{\pi r^3} = \frac{2T}{\pi r^3} = 2 * 20 = 40Mpa$$

مثال: میله فولادی با مقطع دایره ای به قطر 60 mm مطابق شکل تحت لنگرهای پیچشی در نقاط B,A قرار گرفته است لنگر پیچشی اعمال شده در مقطع B ، $T_B = 8\pi KN.m$ است اگر دوران مقطع B صفر باشد دوران مقطع A چه قدر است؟

$G = 8\times10^4 \, MPa$ **(سراسری 81)**



جواب: چون در طول میله دو لنگر پیچشی وارد میشود برای محاسبه زاویه دوران میله باید آن را به دو تکه تقسیم کنیم.

واحد N,mm

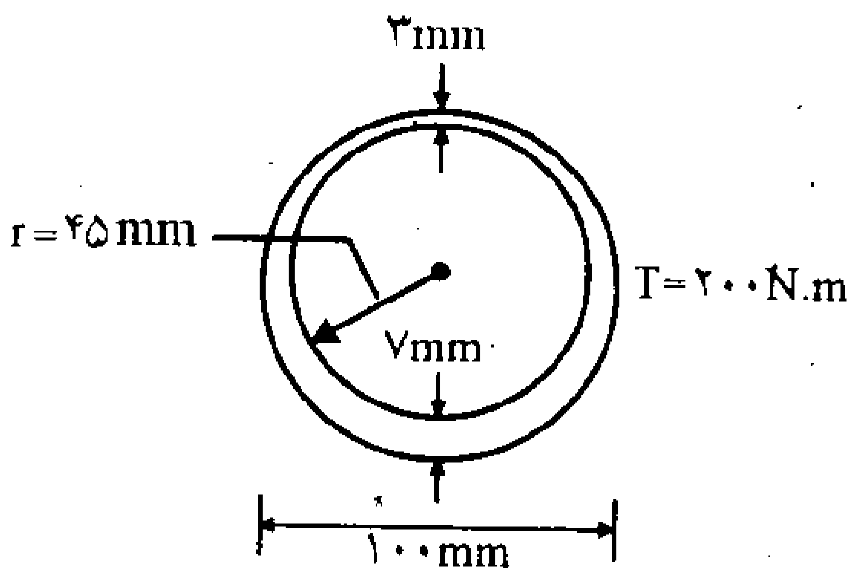
$$\Phi = \sum \frac{T_i.\ell_i}{j_i.G_i}$$

$$\Phi_B = \frac{(T_A - T_B)\times 3000}{j.G} = 0 \Rightarrow T_A - T_B = 0 \Rightarrow T_A = T_B = 8\pi\ kN-m$$

$$j = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi \times (30)^4}{2}$$

$$\Phi_A = \frac{T_A \times 3000}{\frac{\pi \times 30^4}{2}.G} + 0 = \frac{8\pi \times 10^6\ N-mm \times 3000}{\frac{\pi \times 30^4}{2} \times 8 \times 10^4} = 0.74\ rad$$

مثال: چنانچه لنگر پیچشی برابر با 200 N-m بر یک لوله جداره نازک با سطح مقطع نشان داده شده با ضخامت متغیر وارد شود حداکثر تنش برشی در مقطع چند مگاپاسکال است؟ (سراسری 81)



جواب: در مقاطع جدار نازک بسته حاصلضرب تنش در ضخامت جدار مقداری ثابت است. به همین جهت مقدار تنش برشی در جایی ماکسیمم است که مقدار ضخامت جدار مینیمم باشد. بر این اساس تنش برشی ماکسیمم در جایی که ضخامت قطعه به 3 میلیمتر کاهش می یابد به مقدار ماکسیمم خود میرسد.

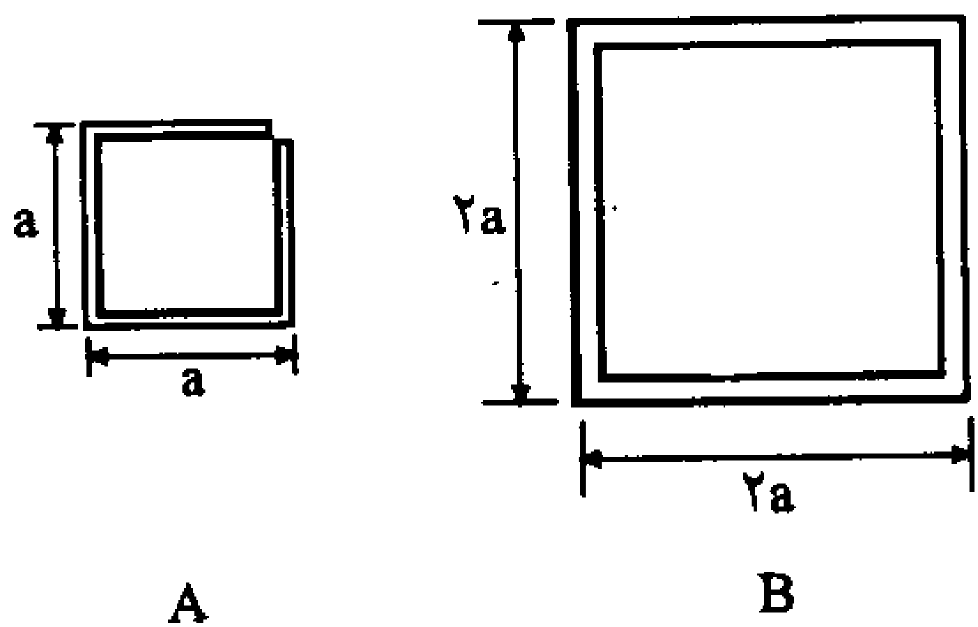
واحد N-mm

$$\tau = \frac{T}{2t.A} \qquad R_{ave} = 45 + \left(\frac{\frac{7}{2} + \frac{3}{2}}{2} \right) = 47.5\, mm$$

$$\tau = \frac{200 \times 10^3\ N - mm}{2 \times 3 \times \left(\pi \times 47.5 \right)^2} = 4.7 \frac{N}{mm^2} = 4.7\, MPa$$

در محاسبه A چون باید مساحت قسمت محصور بین خط مرکزی جداره محاسبه شود، و چون ضخامت جداره متغیر است، ابتدا میانگین ضخامت جداره محاسبه شده و سپس نصف این ضخامت متوسط به شعاع داخلی جداره اضافه شده است.

مثال: مقطع B جداره نازک بسته به ضخامت یکسان t و مقطع A جدار نازک باز به ضخامت یکسان t میباشد. اگر $t = \frac{a}{20}$ باشد، در مقابل یک لنگر پیچشی ثابت تنش برشی در B چند برابر تنش برشی در A می شود؟ (سراسری 80)



جواب:

برای مقطع B که جداربسته است داریم:

$$\tau_B = \frac{T}{2t.A} = \frac{T}{2t.4a^2} = \frac{T}{\frac{2a}{20}.4a^2} = \frac{5T}{2a^3}$$

با اندکی اغماض در فرمول مساحت خارجی مقطع را قرار می دهیم.

برای مقطع A جدار باز هم داریم:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{C_1.b.a^2} = \frac{T}{\frac{1}{3}\times 4a\left(\frac{a}{20}\right)^2} = \frac{300T}{a^3}$$

$$a = t$$

$$b = 4\times a = 4a$$

$$\frac{b}{a} = \frac{4a}{t} = \frac{4a}{\frac{a}{20}} = 80$$

$$80 \geq b \Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{300T}{a^3}}{\frac{5T}{2a^3}} = 120$$

مقاطع جدار نازک بسته در مقابل پیچش خیلی مقاوم تر از مقاطع جدار نازک باز هستند.

مثال: دو لوله جدار نازک اولی به شعاع متوسط R و به ضخامت جداره t و دومی به شعاع متوسط 2R و ضخامت جداره t/2 می باشد در اثر یک لنگر پیچشی یکسان تنش برشی به وجود آمده در میله اول چند برابر میله دوم است؟ (سراسری 79)

جواب:

حالت اول :

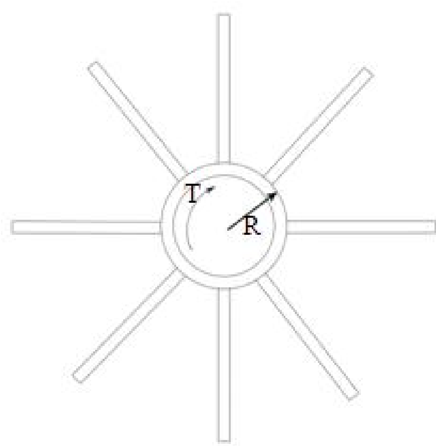
$$\tau_1 = \frac{T}{2t.A} = \frac{T}{2t.\pi R^2} = \frac{T}{2\pi t R^2}$$

حالت دوم

$$\tau_2 = \frac{T}{2\left(\frac{t}{2}\right)\times \pi (2R)^2} = \frac{T}{4\pi t R^2}$$

$$\frac{\tau_1}{\upsilon_2} = \frac{\frac{T}{2\pi t R^2}}{\frac{T}{4\pi t R^2}} = 2$$

مثال: میله ای با سطح مقطع نشان داده شده تحت تاثیر لنگر پیچشی T می باشد شعاع متوسط دایره R و ضخامت آن t می باشد. ضخامت هر یک از ورق های اتصالی به دایره جدار نازک t و طول آن $2\pi R$ می باشد. چنانچه نسبت 10= $\frac{R}{t}$ باشد چند درصد لنگر پیچشی توسط جدار نازک دایره تحمل می شود. (سراسری 77)



جواب: لنگر پیچشی T به نسبت سختی پیچشی دایره و ورق ها بین آنها تقسیم می شود سختی پیچشی نمایشگر میزان لنگر پیچشی است که باعث ایجاد دوران واحد در عضو میشود. (به بیان دیگر سختی پیچشی برابر نسبت لنگر پیچشی به دوران ناشی از این لنگر است). سختی پیچشی را می توان طبق رابطه ی زیر تعریف کرد:

$$K = \frac{T}{\Phi}$$

$$\Phi = \frac{T.\ell}{G.j} \Rightarrow K = \frac{T}{\frac{T.\ell}{G.j}} = \frac{G.j}{\ell}$$

$$K = \frac{Gj}{\ell}$$

برای هر دو قسمت مقطع مقدار G و ℓ یکسان است پس می توان نتیجه گرفت که توزیع لنگر پیچشی فقط بستگی به j (ممان اینرسی قطبی) قسمتهای مختلف مقطع دارد و با توجه به نسبت j قسمتهای مختلف لنگر توزیع می شود.

برای مقطع لوله ای جدار نازک: $j = 2\pi t R^3$

برای مقاطع جدار نازک باز: $j = \sum\left(c_i b_i a_i^3\right)$

$$\frac{b_i}{d_i} \geq ۱۰ \Rightarrow C_i = \frac{۱}{۳}$$

دایره تو خالی $j_1 = 2\pi t R^3 = 2\pi\left(\frac{R}{10}\right)R^3 = \frac{\pi R^4}{5}$

زایده های مستطیلی $j_2 = 8\times\left[\frac{1}{3}\times 2\pi R\times\left(\frac{R}{10}\right)^3\right] = \frac{16}{3000}\pi R^4 = \frac{2}{375}\pi R^4$

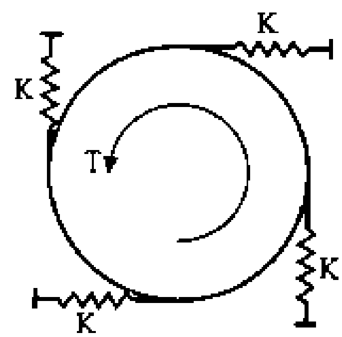
$$\frac{2\pi R}{\frac{R}{10}} = 20\pi \geq 10 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{3}$$

برای کل مقطع = $j = j_1 + j_2 = \frac{\pi R^4}{5} + \frac{2}{375}\pi R^4 = 0.2053\pi R^4$

نسبت سختی دایره توخالی به سختی کل مقطع$=\frac{j_1}{j}=\frac{\frac{\pi R^4}{5}}{0.2053\pi R^4}=0.974$

در نتیجه 97.4٪ از پیچش وارد به مقطع توسط دایره توخالی تحمل می شود.

مثال: سختی پیچشی یک صفحه صلب دایره ای متصل به 4 فنر با سختی k=10 ton/m برابر چه قدر است؟ قطر صفحه 20 cm است. (سراسری 77)

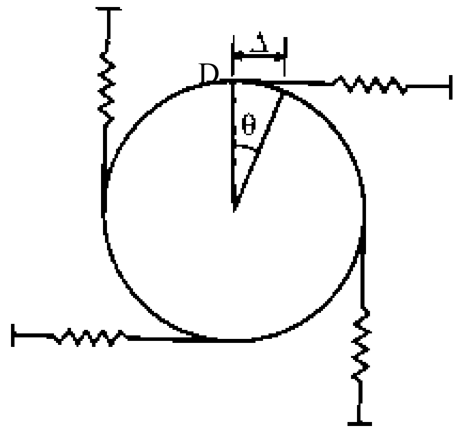


جواب:

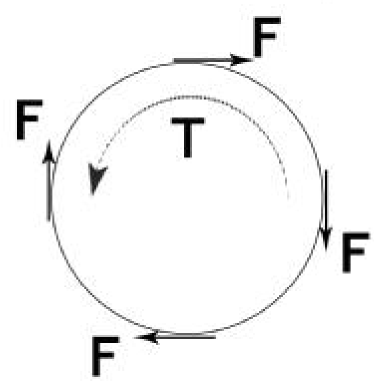
$$\text{سختی پیچشی}\; K_t=\frac{T}{\theta}$$

وقتی که θ (زاویه دوران صفحه) کوچک باشد، مقدار Δ(تغییر طول فنر) با طول کمان مجاور آن تقریباً برابر خواهد بود. طول هر کمان از دایره برابر حاصل ضرب شعاع دایره در زاویه کمان (بر حسب رادیان) می باشد.

$$\Delta=\theta.R$$



با توجه به جهت گشتاور پیچشی وارده به صفحه ، تمامی فنرها تحت کشش قرار میگیرند و بر این اساس جهت نیروهای فنرها تعیین میشود. در شکل زیر نیروها نمایش داده شده اند. توجه شود که نیروهای ترسیم شده ، نیروهایی هستند که فنر به صفحه وارد میکند و در واقع عکس العمل نیرویی است که صفحه به فنرها وارد میکند که جهت آن برعکس نیروی اول است.



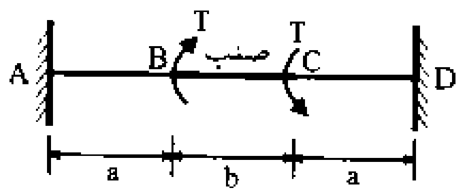
ضمن محاسبه نیروی هر یک از فنرها (که با توجه به سختی و تغییر شکل ثابت آنها، نیرو در تمام آنها یکسان است)، نسبت به مرکز دایره معادله تعادل لنگر را می نیویسیم:

$$F = K.\Delta = KR\theta \qquad \sum T = 0 \Rightarrow T - 4(F \times R) = 0 \Rightarrow T = 4FR$$

$$T = 4(KR\theta)R = 4K\theta R^2 \Rightarrow \frac{T}{\theta} = K_t = 4KR^2$$

$$K_t = 4 \times 10 \times (0.1)^2 = 0.4 \frac{ton-m}{Rad}$$

مثال: در شکل رو به رو BC صلب می باشد دو کوپل پیچشی به نقاط C,B از میله AD وارد شده است لنگر پیچشی ایجاد شده در قسمت AB چه قدر است؟ (سراسری 76)



جواب: میله نمایش داده شده در شکل یک میله نامعین است و همانند آنچه در مورد میله های تحت نیروی محوری گفته شد، اینجا نیز باید یکی از تکیه گاهها آزاد شده و به جای آن واکنش تکیه گاهی متناظر به صورت مجهول قرار داده شود. همچنین متناظر با قید آزاد شده باید یک معادله سازگاری نیز نوشت. در اینجا تکیه گاه A را حذف کرده و به جای آن واکنش تکیه گاهی این تکیه گاه که یک لنگر پیچشی است قرار داده میشود. معادله سازگاری در اینجا نیز صفر بودن دوران در نقطه A خواهد بود.

(چون لنگر در قسمت AB مورد نظر است بهتر است تکیه گاه A آزاد شود.)

معادله سازگاری: $\Phi_A = 0$

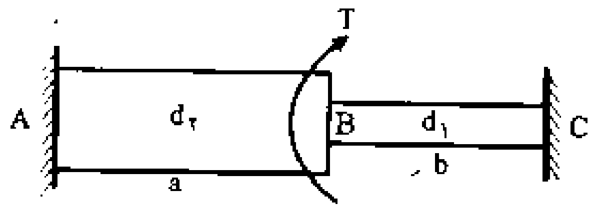
با توجه به صلبیت قطعه BC مدول الاستیسیته برشی این قطعه بینهایت است. (در قطعات صلب با توجه به اینکه این قطعات تغییر شکلی نمیدهند، مقدار مدول الاستیسیته همیشه بینهایت است)

قطعه صلب: $G_{BC} = \infty$

$$\Phi_A = \frac{\sum T_i.\ell_i}{j_i.G_i} = \frac{-T_A \times a}{j.G} + \frac{(T-T_A).b}{\infty.j_{BC}} + \frac{-T_A.a}{j.G} = \frac{-2T_A.a}{j.G} = 0$$
$$\Rightarrow T_A = 0$$

در اینجا چون مقدار لنگر پیچشی و مدول الاستیسیته برشی در طول میله متغیر است، آن را به سه تکه تقسیم کرده و در هر تکه مقدار دوران جداگانه محاسبه شده و با هم جمع شده است. در هر تکه مقدار لنگر پیچشی وارد بر آن تکه برابر مجموع لنگر پیچشی وارد بر میله از انتهای میله تا ابتدای تکه مورد نظر است. جهت لنگر پیچشی تکیه گاه A به طور اختیاری ساعتگرد فرض شده است. در نوشتن معادله تعادل هم جهت پادساعتگرد مثبت فرض شده است.

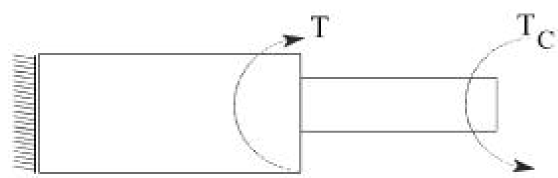
مثال: تیر زیر از اتصال دو قطعه مدور توپر به اقطار d_2 , d_1 تشکیل شده است. اگر دو انتهای تیر گیردار باشد و تیر در قطعه B تحت تاثیر پیچش T قرار داشته باشد مطلوبست عکس العمل تکیه گاه C ؟ (سراسری 72)



جواب:

قطعه نامعین است. تکیه گاه C را آزاد کرده و به جای آن واکنش پیچشی مجهول را قرار می دهیم:

معادله ی سازگاری $\Phi c = 0$



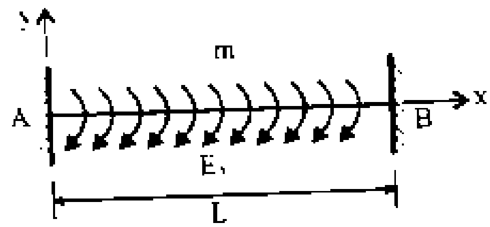
$$\Phi_c = \sum \frac{T_i . \ell_i}{G_i . j_i} = \frac{T_c . b}{G_i \times \left(\frac{\pi d_1^{\,4}}{32}\right)} + \frac{(T_c - T).a}{G \times \left(\frac{\pi d_2^{\,4}}{32}\right)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{32 T_c . b}{G \pi d_1^{\,4}} + \frac{32(T_c - T)a}{G \pi d_2^{\,4}} = 0 \rightarrow \frac{32}{G\pi}\left(\frac{T_c . b}{d_1^{\,4}} + \frac{T_c . a}{d_2^{\,4}}\right) = \frac{32}{G\pi}\left(\frac{a.T}{d_2^{\,4}}\right)$$

$$\Rightarrow T_c\left(\frac{b}{d_1^{\,4}} + \frac{a}{d_2^{\,4}}\right) = \frac{T.a}{d_2^{\,4}}$$

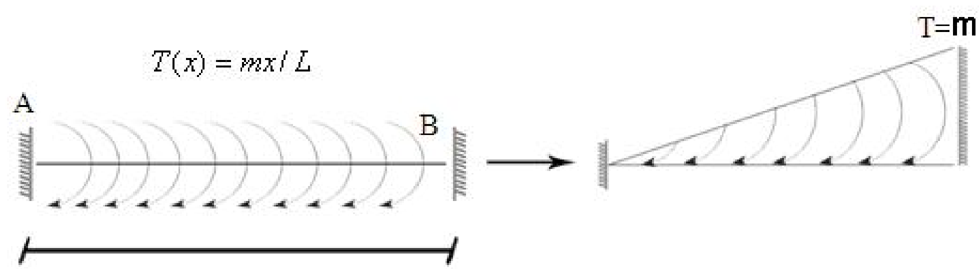
$$T_C \times \frac{b.d_2^{\,4} + a.d_1^{\,4}}{d^4{}_1 . d_2^{\,4}} = \frac{T.a}{d_2^{\,4}} \Rightarrow T_C = \frac{Ta.d_1^{\,4}}{b.d_2^{\,4} + a.d_1^{\,4}}$$

مثال: تیر دوسر گیردار AB تحت لنگر پیچشی گسترده با شدت $T_x = \frac{m}{\ell} x$ قرار دارد میزان لنگر پیچشی در تکیه گاه A چه قدر است؟ (آزاد 80)



جواب: لنگر وارد بر تیر به صورت یک لنگر گسترده مثلثی میباشد. (همانند شکل زیر)

مقدار ماکسیمم لنگر پیچشی در انتهای B و برابر m میباشد.



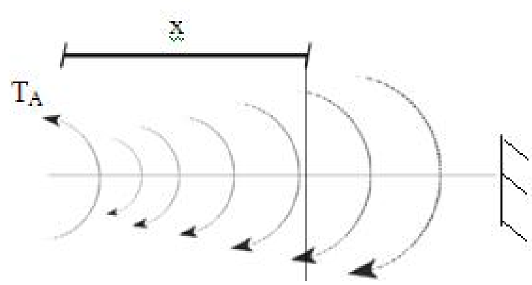
معادله سازگاری = $\Phi_A = ۰$

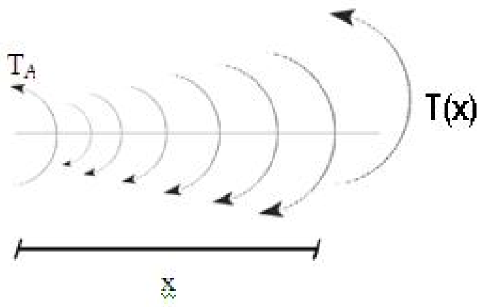
چون لنگر گسترده می باشد باید از روش انتگرال گیری استفاده کنیم:

$$\Phi = \int_0^{\ell} \frac{T(x)dx}{G.j}$$

تعادل پیچش

به فاصله x از سمت چپ میله مقطع زده و تکه سمت چپ را جدا میکنیم و دیاگرام آزاد آن را رسم میکنیم:





معادله تعادل پیچش در این تکه را مینویسم:

چون جنس پیچش از نوع لنگ خمشی است نیاز به بازو لنگر ندارد.

$$\sum T = 0 \Rightarrow T_A - \left(\frac{mx}{\ell} \times \frac{x}{2}\right) + T(x) = 0$$

$$\Rightarrow T(x) = \frac{mx^2}{2\ell} - T_A$$

$$\Phi = \int_0^l \frac{T(x)dx}{G.j} = \int_0^l \frac{\left(\frac{mx^2}{2\ell} - T_A\right)}{G.j} dx = \frac{1}{Gj}\left[\frac{mx^3}{6\ell} - T_A.x\right]_0^L$$

$$= \frac{1}{Gj} \times \left(\frac{ml^2}{6} - T_A.\ell\right) = 0$$

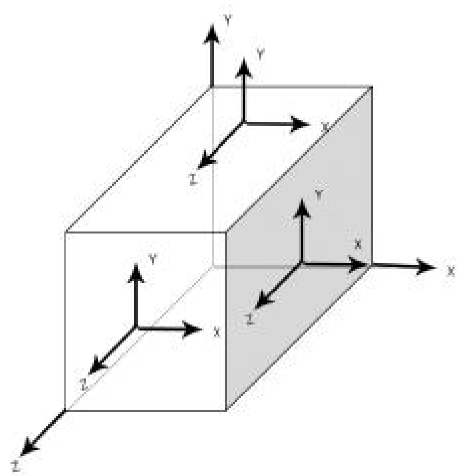
$$\frac{m\ell^2}{6} - T_A\ell = 0 \Rightarrow$$

$$T_A = \frac{m\ell}{6}$$

دایره موهر

تانسور تنش

در مورد تانسور تنش در بخشهای قبلی صحبت شده است که دراینجا جهت یادآوری دوباره مورد بحث قرار میگیرد. در شکل زیر یک المان کوچک از یک جسم به صورت مکعبی شکل نمایش داده شده است. دراین المان تنشهای وارد بر هر یک از صفحات اصلی مکعب نمایش داده است. بر هر صفحه یک تنش عمودی و دو تنش داخل صفحه وجود دارد. این تنشها تشکیل یک ماتریس 3 در 3 میدهند که تانسور تنش نامیده میشود.

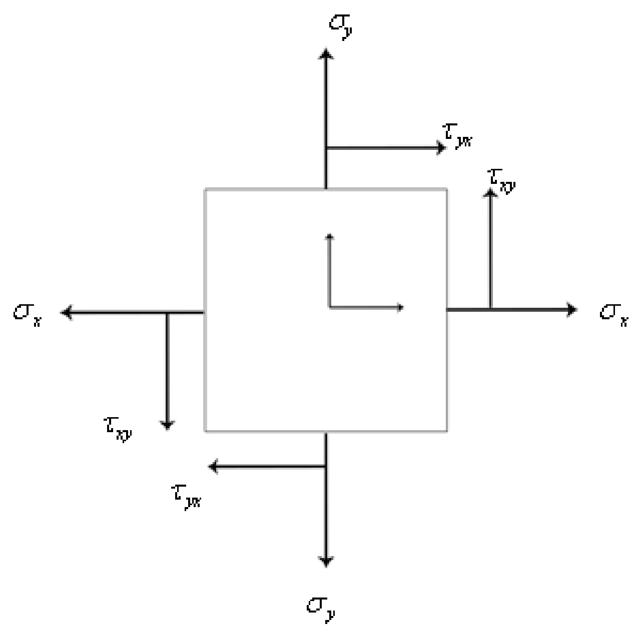


$$\tau_{yx} = \tau_{xy}$$
$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$
$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

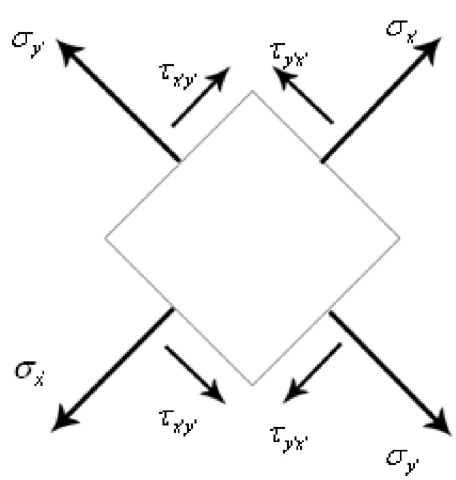
$$\left[\sigma_{iy}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \leftarrow$$ تانسور تنش

اگر روی هر جسم یک المان مکعبی در نظر بگیریم تانسور تنش آن بدین گونه بدست می آید:

حالت دو بعدی: در حالت دوبعدی المان به شکل یک مستطیل در می آید و تنشها به شکل زیر قابل تعریف است:



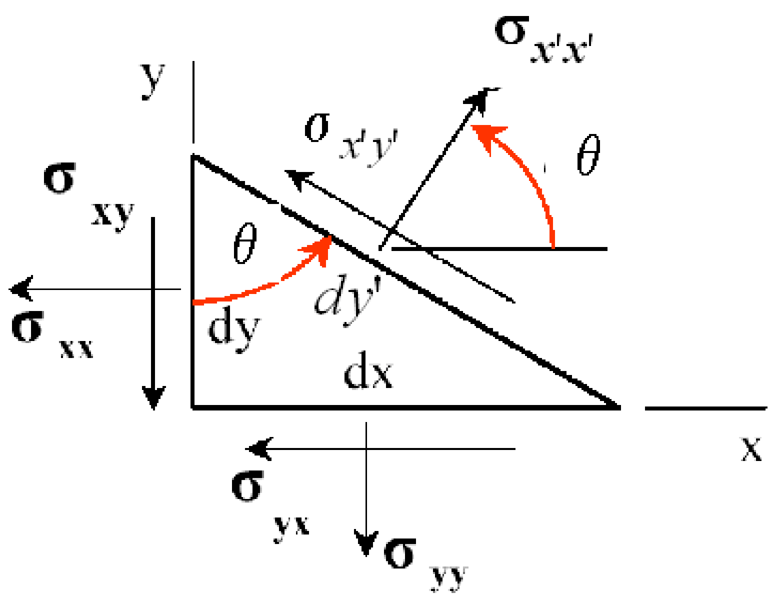
حال اگر این المان به اندازه ی θ در خلاف عقربه های ساعت دوران نماید مقادیر تنش های محوری و برشی بر روی المان دوران کرده، متفاوت خواهد بود.



مقادیر تنش بر روی المان دوران کرده و از روی روابط زیر قابل استخراج است:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} Cos2\theta + \tau_{xy} Sin2\theta$$
$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} Cos2\theta - \tau_{xy} Sin2\theta$$
$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} Sin2\theta + \tau_{xy} Cos2\theta$$

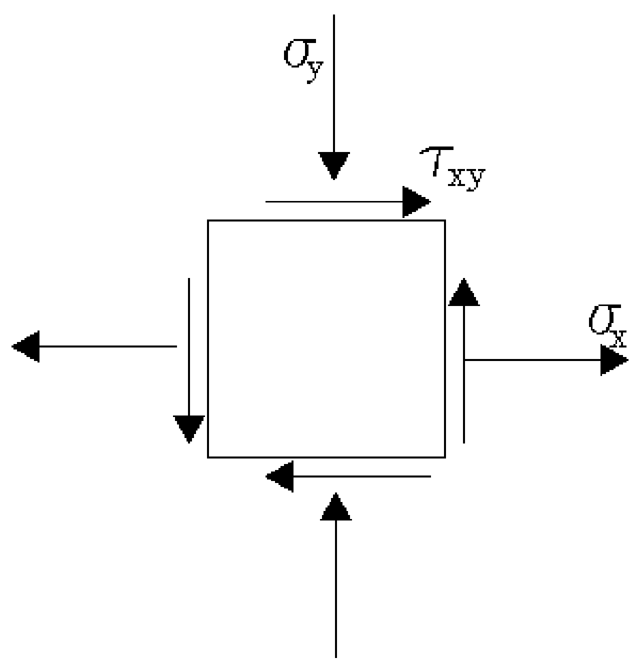
در شکل زیر هم این دوران و تغییر در مقادیر تنشها به نوع دیگری نمایش داده شده است.



روابط بالا را می توان توسط دایره موهر نیز بیان کرد. در دایره موهر ما یک محور افقی داریم که نشان دهنده تنشهای عمودی و یک محور عمودی داریم که نشاندهنده تنشهای برشی میباشد. دایره نیز در این دستگاه مختصات ترسیم میگردد و مرکز آن بر روی محور افقی قرار میگیرد. در این صورت مرکز دایره به مختصات $\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ و شعاع دایره $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ خواهد بود. این دایره حالات مختلف تنش را در یک

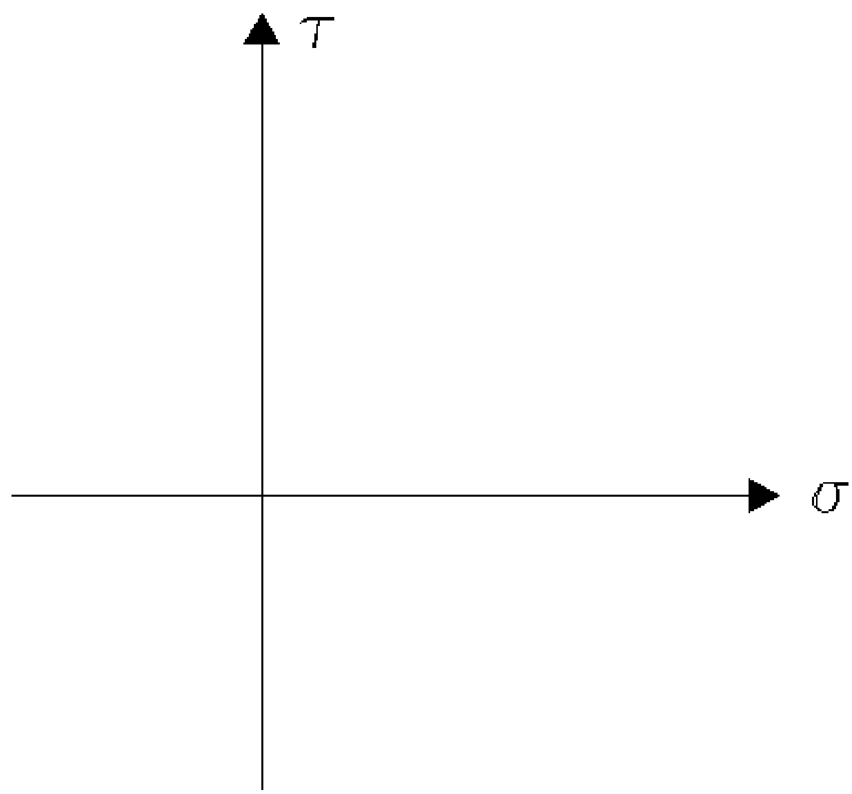
المان هنگامی که المان دچار چرخش می شود، نشان می دهد و بدین صورت رسم میشود که با به دست آوردن σ_{ave}مرکز آن مشخص شده و با محاسبه R شعاع دایره نیز مشخص می شود. هر قطر از این دایره آن را در دو نقطه قطع مینماید. هر یک از این دو نقطه دارای یک مختصات در دستگاه مختصات معرفی شده است. بر این اساس ما 4 مقدار برای هر قطر خواهیم داشت که دو مقدار مربوط به محور افقی (تنشهای عمودی) و دو مقدار دیگر مربوط به محور عمودی (تنشهای برشی) خواهد بود. دو مقدار به دست آمده بر روی محور افقی نشانگر تنشهای عمودی در دو راستای X و Y (σ_x,σ_y) خواهد بود. مقادیر به دست آمده بر روی محور عمودی هم که دو عدد مثبت و منفی با مقدار قدرمطلق برابر خواهد بود، نشانگر مقدار تنش برشی میباشد $(\tau_{xy},-\tau_{xy})$.

به طور مثال در اینجا برای المان با تنشهای زیر دایره موهر به صورت مرحله به مرحله ترسیم شده است.

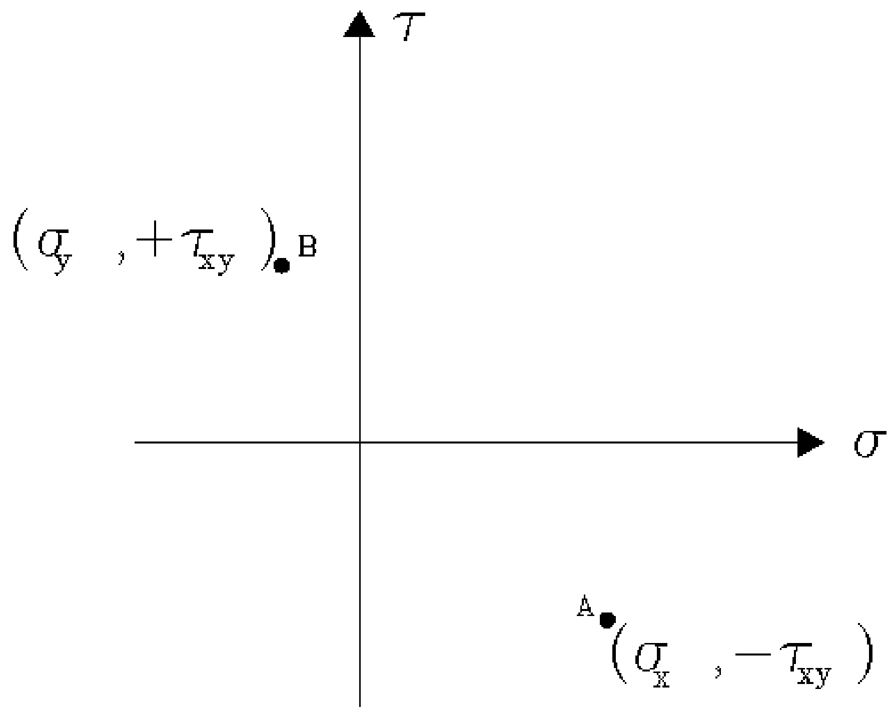


در اینجا فرض شده است که تنش عمودی جهت x به صورت کششی و مثبت و تنش عمودی جهت y به صورت فشاری و منفی است. تنش برشی نیز مثبت فرض شده است. (تنشهای کششی، مثبت و تنشهای فشاری، منفی فرض میشوند. در مورد جهت مثبت و منفی تنشهای برشی در ادامه بحث خواهد شد.)

برای ترسیم دایره موهر ابتدا یک دستگاه مختصات ترسیم میکنیم. محور افقی این دستگاه نمایش دهنده تنشهای عمودی و محور عمودی نمایش دهنده تنشهای برشی است.



بر روی این دستگاه مختصات دو نقطه به مختصات $(\sigma_x,-\tau_{xy})$ و $(\sigma_y,+\tau_{xy})$ مشخص میکنیم. این دو نقطه را در اینجا به ترتیب با A و B نمایش داده ایم.



حال دایره موهر را ترسیم میکنیم. مقدار شعاع و مرکز دایره از روابطی که قبلاً توضیح داده شد قابل محاسبه اند:

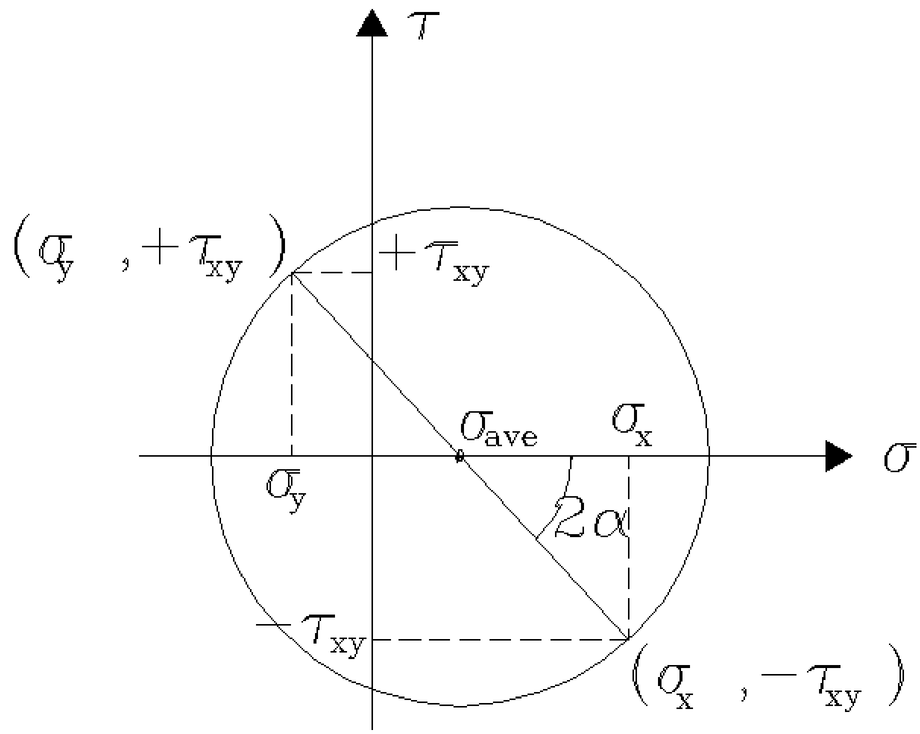
مختصات مرکز دایره:

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

شعاع دایره:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\ 2}}$$

دایره ای که به این شکل ترسیم میشود، مطمئناً از دو نقطه A و B نیز عبور خواهد کرد و خط AB قطری از این دایره خواهد بود که نشاندهنده وضعیت تنش در المان مورد بحث ما خواهد بود.



قطر ترسیم شده در این دایره با محور افقی دایره زاویه ای است که در اینجا این زاویه در شکل با 2α نمایش داده شده است. این زاویه نشان میدهد که اگر المان به میزان نصف این زاویه و همجهت با آن (در اینجا یعنی به میزان α) دوران کند، المان در وضعیت جدید خود به حالتی از تنش میرسد که در آن دیگر تنش برشی وجود ندارد و تنها تنشهای عمودی را خواهیم داشت. مقادیر تنشهای عمودی نیز در این حالت یکی ماکسیمم و دیگری مینیمم خواهد بود. این تنشها ، تنشهای اصلی نامیده میشوند. مقادیر تنشهای اصلی (تنشهای مینیمم و ماکسیمم) و زاویه α (زاویه ای که لازم است المان دوران کند تا تنشهای اصلی در آن رخ دهد) از روابط زیر قابل محاسبه است:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{ave} + R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_{ave} - R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) + \tau_{xy}^2}$$

$$tag2\alpha = \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$$

در مورد زاویه زاویه ای که از رابطه بالا به دست می آید اگر این مقدار مثبت باشد چرخش قطر تا رسیدن به محور افقی به صورت پادساعتگرد و اگر منفی باشد به صورت ساعتگرد خواهد بود.

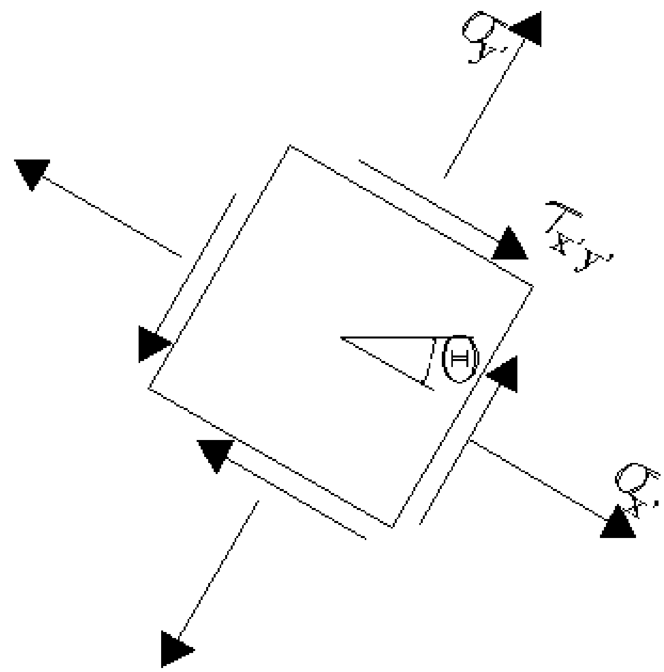
در واقع نقاط تقاطع دایره با محور افقی که شامل دو نقطه است نمایشگر تنشهای اصلی خواهد بود.

کاربرد دیگر دایره موهر، به دست آوردن مقادیر تنشها در المان پس از چرخش آن به میزانی معین است. برای این منظور به شرح زیر عمل میکنیم:

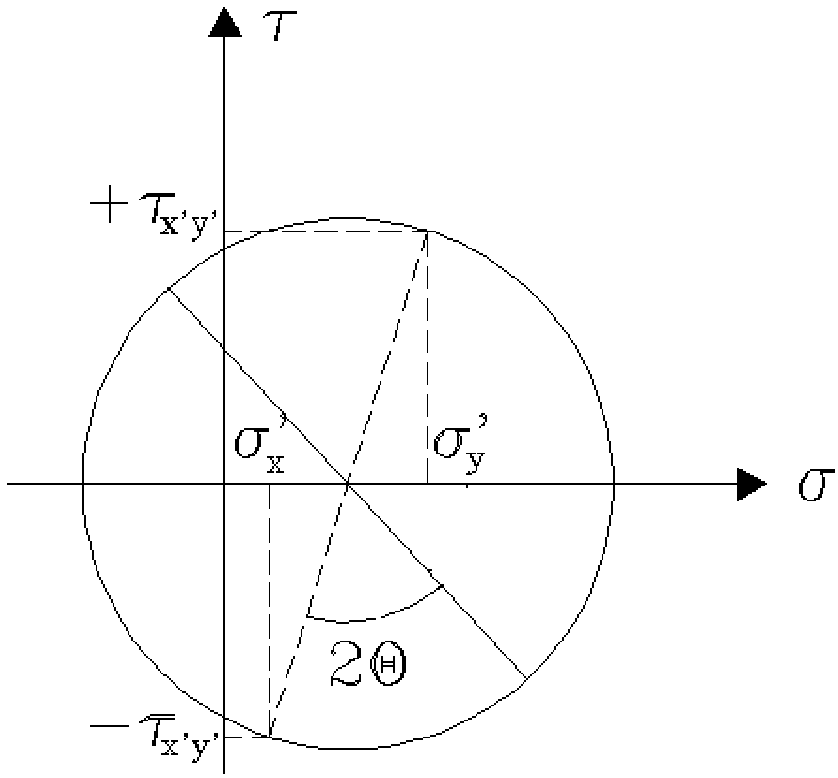
پس از ترسیم دایره موهر و قطری از دایره که نمایشگر وضعیت تنش در حالت اولیه المان است، این قطر را به میزان دو برابر زاویه ای که المان دوران یافته و همجهت با چرخش المان دوران میدهیم تا قطر جدیدی از دایره به دست آید. قطر جدید دایره نشاندهنده وضعیت تنش در المان دوران یافته خواهد بود.

در اینجا به طور مثال به المان نمایش داده شده در شکل قبل این کار را انجام میدهیم.

فرض میکنیم که المان مورد نظر ما به مقدار زاویه θ و در جهت عقربه های ساعت دوران کرده است.



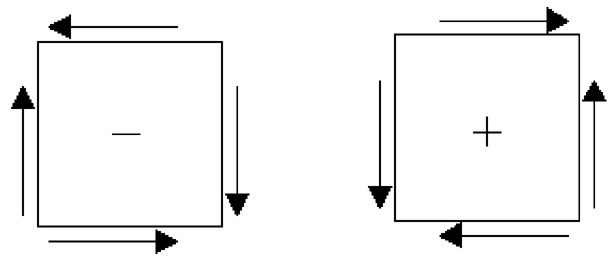
در دایره موهر ترسیم شده در مرحله قبل قطر ترسیم شده از دایره را به میزان 2θ و به صورت ساعتگرد دوران میدهیم تا قطر جدید و به تبع آن مقادیر تنشها برای المان دوران یافته به دست آیند: (قطر ترسیم شده به صورت خط چین قطر نشان دهنده وضعیت تنش در حالت دوران یافت است)



در این زمینه توجه گردد که انتهایی از قطر دایره که قبلاً نمایشگر σ_x بوده است پس از دوران نمایشگر $\sigma_{x'}$ خواهد بود و بالعکس انتهایی از قطر دایره که قبلاً نمایشگر σ_Y بوده است پس از دوران نمایشگر $\sigma_{Y'}$ خواهد بود. جهت صحیح تنش برشی هم همیشه با انتهایی از قطر دایره قرار دارد که نمایشدهنده σ_Y یا $\sigma_{Y'}$ باشد و انتهای دیگر قطر دایره نمایشگر تنش برشی با علامت مخالف خواهد بود. (همانند آنچه در اشکال بالا نمایش داده شده است)

برای تشخیص علامت مثبت و یا منفی تنشهای برشی هم میتوان طبق قرارداد زیر عمل کرد:

اگر دو تنش برشی قرار گرفته به موازات محور y (یا y’) ایجاد یک کوپل پادساعتگرد نمایند، علامت تنش برشی مثبت است و بالعکس اگر ایجاد یک کوپل ساعتگرد نمایند علامت تنش برشی منفی خواهد بود. در این زمینه میتوان از اشکال زیر هم کمک گرفت:

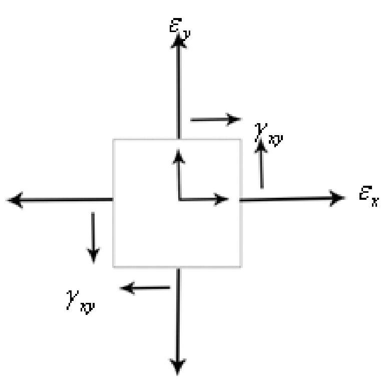


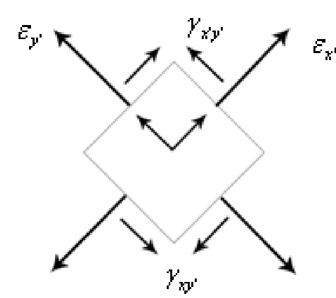
در مورد تنشهای برشی و تشخیص علامت آنها و نحوه ترسیم صحیح آنها در دایره موهر میتوان از روش قراردادی زیر هم استفاده گردد. اگر توجه نماییم بردارهای تنشهای برشی که 4 بردار هستند دو به دو تشکیل دو کوپل لنگر را میدهند که جهت این دو کوپل همیشه مخالف هم میباشد. به طور قراردادی جهت ساعتگرد را مثبت و جهت پادساعتگرد را منفی فرض میکنیم. بر این اساس ما یک تنش برشی با کوپل مثبت و یک تنش برشی با کوپل منفی برای هر المان داریم. وقتی که میخواهیم بر روی دایره مور نقطه شامل تنش محوری x و تنش برشی را مشخص کنیم برای تشخیص علامت تنش برشی جهت رسم نقطه مورد نظر نگاه میکنیم که دو بردار تنش برشی که عمود بر راستای جهت راستای تنش عمودی هستند تشکیل چه کوپلی میدهند. اگر این کوپل ساعتگرد بود با علامت مثبت و اگر پادساعتگرد بود با علامت منفی روی صفحه مختصات در نظر گرفته میشود. برای ترسیم نقطه دیگر مربوط به تنش جهت y بدیهی است که جهت تنش برشی مخالف حالت قبل خواهد بود. به طور مثال در شکل قبلی در سمت چپ برای تنش عمودی جهت x دو بردار تنش برشی عمود بر آن تشکیل یک کوپل

ساعتگرد میدهند و درنتیجه هنگام ترسیم بر روی دایره موهر، تنش محوری جهت x را با تنش برشی با علامت مثبت و تنش محوری جهت y را با تنش برشی با علامت منفی در نظر میگیریم. برای شکل سمت راست آن وضعیت برعکس است. توجه گردد که اگر میخواهیم از روابط معرفی شده در ابتدای این بخش به جای دایره موهر استفاده کنیم برای تشخیص علامت تنش برشی فقط از قرارداد شکل قبل کمک میگیریم و علامت تنش برشی در هر سه رابطه یک علامت ثابت مطابق قرارداد شکل قبل خواهد بود. مواردی که اینجا گفته شد فقط برای روش دایره موهر است.

تبدیلات کرنشها:

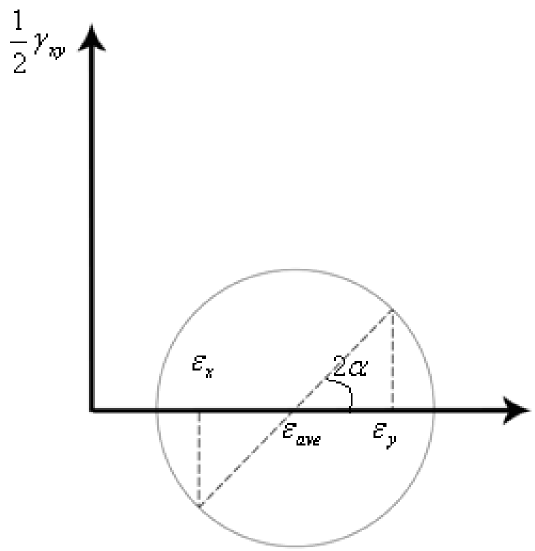
همانند تنش برای کرنش ها نیز می توان بردار ترسیم نمود و این بردار ها را بر روی المان ها نمایش داد و در صورت دوران المان مقادیر جدید آنها را با روابطی تقریباً مشابه تبدیلات تنش بدست آورد و برای آن نیز به طور مشابه دایره موهر ترسیم نمود.





$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} Cos2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} Sin2\theta$$
$$\varepsilon_{y'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} Cos2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2} Sin2\theta$$
$$\gamma_{x'y'} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) Sin2\theta + \gamma_{xy} Cos2\theta$$

α



$$\varepsilon_{ave} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}$$
$$R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$
$$tag2\alpha = \frac{\frac{\gamma_{xy}}{2}}{\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}} = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$
$$\varepsilon_{\max,\min} = \varepsilon_{ave} \pm R = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$
$$\gamma_{\max} = 2R = \sqrt{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy^2}}$$

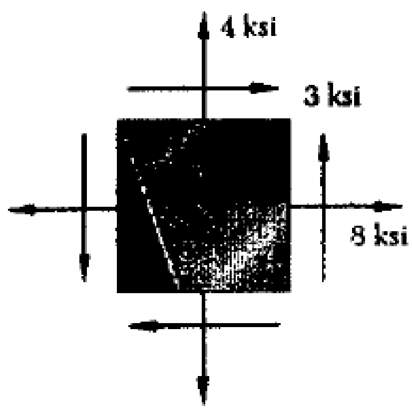
در دایره موهر کرنش، محور عمودی $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ است . در این جا نیز در صورت دوران المان

پس از بدست آوردن قطر دایره متناظر با حالت قبل از دوران، آن را دو برابر زاویه

دوران و هم جهت با جهت چرخش المان بر روی دایره می چرخانیم. وضعیت جدید آن نشان دهنده مقادیر تنش ها در المان جدید می باشند.

قراردادهای مربوط به تشخیص علامت کرنشهای برشی و نحوه ترسیم آن بر روی دایره موهر از نظر علامت مشابه حالت قبل مربوط به دایره موهر تنش است.

مثال: برای المان نشان داده شده در شکل زیر مطلوبست محاسبه مقادیر تنش برای صفحه مایلی که با راستای عمودی زاویه 20 درجه میسازد. (چرخش المان به صورت پادساعتگرد میباشد.)



جواب: برای حل این مساله میتوان به سه روش عمل کرد. در روش اول با توجه به چرخش 20 درجه ای و استفاده از روابطی که در ابتدای این بخش معرفی شد ، مقدار تنش در صفحه مایل به دست می آید. خواهیم داشت:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} Cos\,2\theta + \tau_{xy} Sin2\theta$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} Cos2\theta - \tau_{xy} Sin2\theta$$

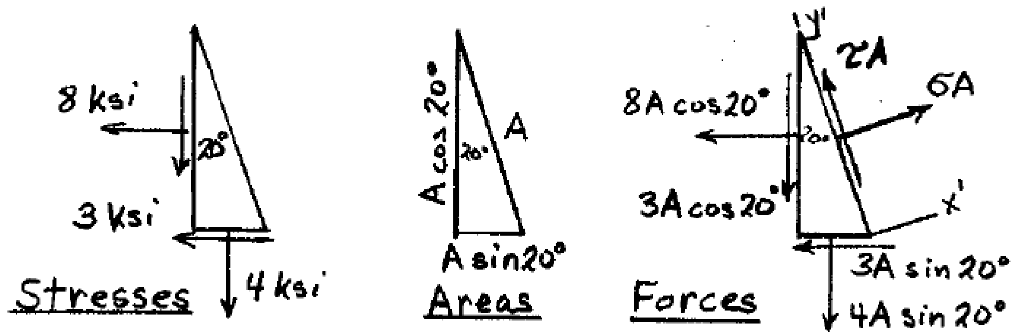
$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} Sin2\theta + \tau_{xy} Cos2\theta$$

چون در اینجا تنها تنشها بر روی صفحه عمودی با زاویه 20 درجه با راستای عمودی خواسته شده است، محاسبه $\sigma_{x'}$ و $\tau_{x'y'}$ کفایت میکند. با توجه به چرخش پادساعتگرد مقدار زاویه باید با علامت مثبت در نظر گرفته شود. مقدار تنش برشی هم مطابق قراردادی که قبلاً توضیح داده شد باید مثبت فرض شود. دو تنش عمودی هم به علت کششی بود ن با علامت مثبت در نظر گرفته میشوند.

$$\sigma_{x'} = \frac{4+8}{2} + \frac{8-47}{2} Cos40 + 3Sin40 = 9.46ksi$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{8-4}{2} Sin40 + 3Cos40 = 1.013ksi$$

روش دوم استفاده از معادلات تعادل است. یک المان مثلثی در نظر میگیریم. دو ضلع از این المان همان اضلاع افقی و عمودی مشابه المان نشان داده شده در صورت سوال است و ضلع سوم یا وتر با راستای قائم زاویه 20 درجه میسازد. (وتر همان راستای مایلی است که در آن تنشها مورد نظر ما است.) به هر ضلع المان یک تنش عمود بر سطح و یک تنش به موازات سطح (که همان تنش برشی است) وارد میشود. برای آنکه تنشها را به نیرو تبدیل نماییم باید آنها را در مساحت ضلعی از المان که تنش به آن وارد میشود ضرب نماییم. با توجه به اینکه ضخامت المان در جهت عمود بر سطح برای همه ثابت است مقدار نسبت مساحت هر ضلع از المان تنها بستگی به طول آن ضلع دارد و با توجه به روابط مثلثاتی میتوانیم طول هر ضلع را محاسبه و تنشها را تبدیل به نیرو نماییم. در شکل زیر این مساله نمایش داده شده است.



حال معادلات تعادل المان را مینویسیم. ابتدا معادله تعادل در راستای عمود بر وتر مثلث را مینویسم تا مقدار تنش عمود بر سطح مایل به دست آید:

$$+\nearrow \Sigma F = 0$$
$$\sigma A - 8A\cos 20^\circ \cos 20^\circ - 3A\cos 20^\circ \sin 20^\circ - 3A\sin 20^\circ \cos 20^\circ - 4A\sin 20^\circ \sin 20^\circ = 0$$
$$\sigma = 8\cos^2 20^\circ + 3\cos 20^\circ \sin 20^\circ + 3\sin 20^\circ \cos 20^\circ + 4\sin^2 20^\circ = 9.46 \text{ ksi}$$

حال این معادله تعادل را در راستای موازی با وتر مثلث مینویسم تا مقدار تنش برشی نیز در راستای مورد نظر به دست آید:

$$\Sigma F = 0$$
$$\tau A + 8A\cos 20^\circ \sin 20^\circ - 3A\cos 20^\circ \cos 20^\circ + 3A\sin 20^\circ \sin 20^\circ - 4A\sin 20^\circ \cos 20^\circ = 0$$
$$\tau = -8\cos 20^\circ \sin 20^\circ + 3(\cos^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ) + 4\sin 20^\circ \cos 20^\circ = 1.013 \text{ ksi}$$

روش سوم در حل این مساله استفاده از دایره موهر است. در این روش با توجه به معلوم بودن مقادیر تنش ابتدا مختصات مرکز دایره و شعاع دایره را مشخص مینماییم:

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{8+4}{2} = 6$$

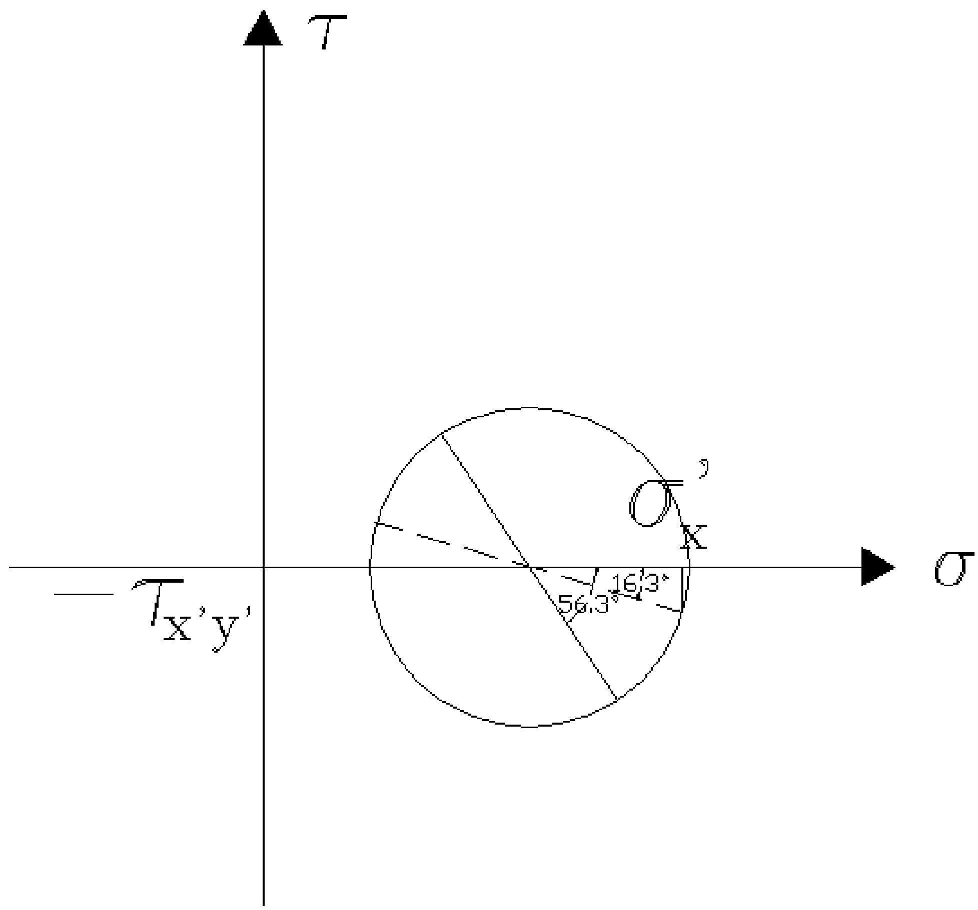
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + {\tau_{xy}}^2} = \sqrt{\left(\frac{8-4}{2}\right)^2 + 3^2} = 3.61$$

بر این اساس یک دایره به قطر 3.61 و مرکز 6 روی محور افقی ترسیم میکنیم و قطری از آن که از نقاط (8,-3) و (4,3) { یعنی: $(\sigma_x,-\tau_{xy})$ و $(\sigma_y,+\tau_{xy})$ } میگذرد، ترسیم میکنیم.

برای رسیدن به حالت المان مایل قطر به دست آمده را به میزان دو برابر زاویه مورد نظر یعنی به میزان 40 درجه و به صورت پادساعتگرد میچرخانیم. زاویه قطر دایره قبل از چرخش با افق به شرح زیر به دست می آید:

$$tag2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2\times 3}{8-4} = 1.5 \Rightarrow 2\alpha = \tan^{-1} 1.5 = 56.3$$

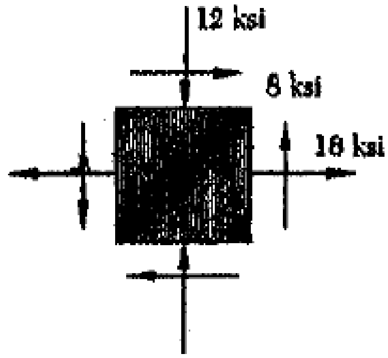
پس بر این اساس زاویه قطر دایره پس از چرخش با افق 40 درجه کمتر و برابر 16.3 خواهد بود. چون ما بر روی صفحه دوران کرده به دنبال $\sigma_{x'}$ هستیم، پس اعداد انتهایی از قطر دوران کرده را استفاده میکنیم که قبل از چرخش عدد مربوط به σ_x را مشخص میکرد. (همانند شکل زیر) و همانطور که قبلاً نیز گفته شد، طبقه قرار با σ_x و $\sigma_{x'}$ تنش برشی با علامت مخالف (τ_{xy}) نمایش داده میشود



پس خواهیم داشت:

$$\sigma_{x'} = \sigma_{ave} + R.\cos 16.3 = 6 + 3.61\cos 16.3 = 9.46ksi$$
$$\tau_{x'y'} = R\sin 16.3 = 3.61\sin 16.3 = 1.013ksi$$

مثال: برای المان با تنشهای نشان داده شده مطلوبست محاسبه تنشهای اصلی و زاویه المان با تنشهای اصلی با افق



جواب:

$$\sigma_x = 18 \text{ ksi} \qquad \sigma_y = -12 \text{ ksi} \qquad \tau_{xy} = 8 \text{ ksi}$$

(a) $$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{(2)(8)}{18+12} = 0.5333$$

$$2\theta_p = 28.07^\circ \qquad \theta_p = 14.04^\circ,\ \ 104.04^\circ$$

(b) $$\sigma_{max,min} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

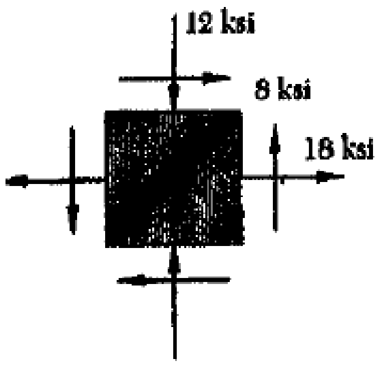
$$= \frac{18-12}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{18+12}{2}\right)^2 + (8)^2}$$

$$= 3 \pm 17 \text{ ksi}$$

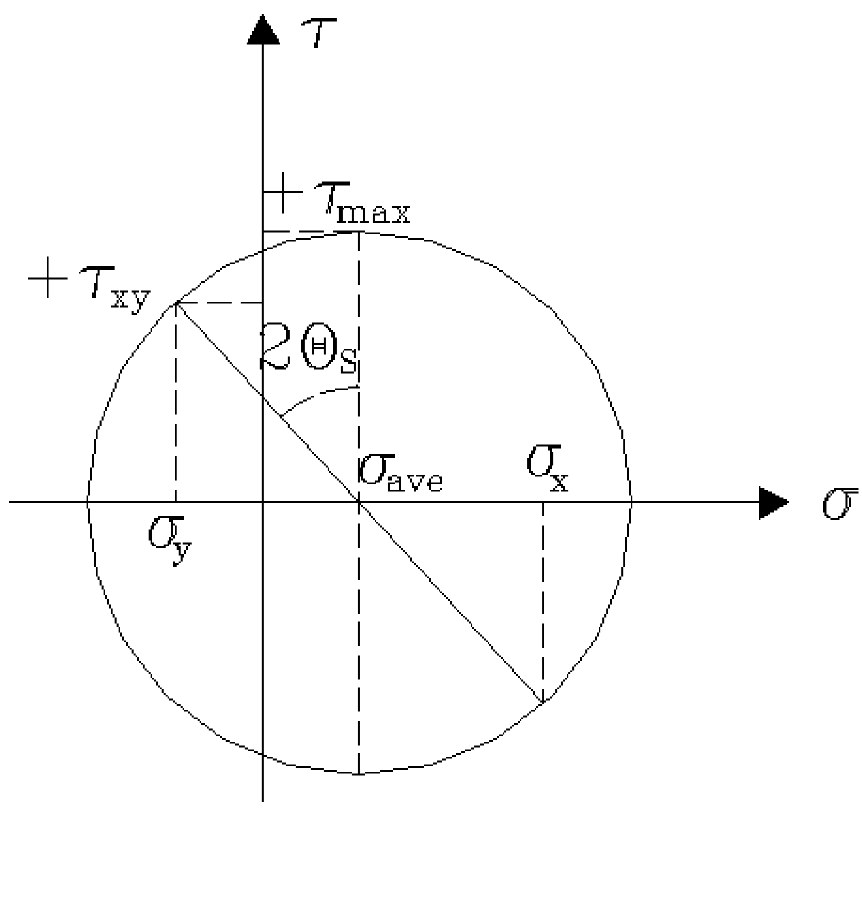
$$\sigma_{max} = 20 \text{ ksi}$$

$$\sigma_{min} = -14 \text{ ksi}$$

مثال: برای المان با تنشهای نمایش داده شده مطلوبست محاسبه زاویه صفحه ای که در آن تنش برشی ماکسیمم رخ میدهد و مقدار تنش برشی ماکسیمم. همچنین مقدار تنش عمودی در صفحه مورد نظر



جواب: مقدار تنش برشی ماکسیمم برابر شعاع دایره موهر است و تنش برشی ماکسیمم در قطری از دایره موهر رخ میدهد که این قطر عمودی باشد. در این شرایط مقدار تنش عمودی برابر مختصات مرکز دایره یا تنش میانگین خواهد بود.



$$\sigma_x = 18 \text{ ksi} \qquad \sigma_y = -12 \text{ ksi} \qquad \tau_{xy} = 8 \text{ ksi}$$

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -\frac{18+12}{(2)(8)} = -1.875$$

$$2\theta_s = -61.93^\circ \qquad \theta_s = -30.96^\circ,\ 59.04^\circ$$

در بالا در فرمول محاسبه زاویه چرخش با توجه به اینکه در شکل ترسیم شده زاویه ای که قطر مایل باید بچرخد تا به قطر قائم برسد به صورت ساعتگرد است و طبق قرارداد چرخش ساعتگرد منفی میباشد، از یک علامت منفی نیز استفاده شده است. در مورد زاویه به دست آمده هم به یاد داشته باشید که معادله آرک تانژانت همیشه در فاصله 0 تا 360 درجه دو جواب دارد که این دو اختلافی به میزان 180 درجه با هم دارند. بر این اساس ما دو زاویه 61.93- و 118.07 را به عنوان جواب داریم که با نصف کردن این دو زاویه به مقادیر بالا یعنی 59.04 و 30.96- میرسیم.

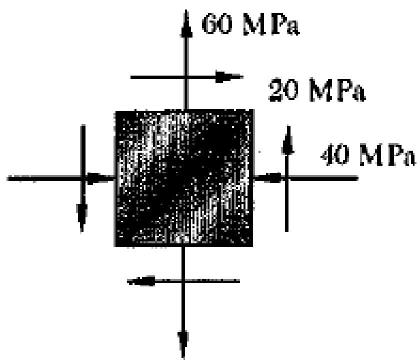
$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{18+12}{2}\right)^2 + (8)^2} = 17 \text{ ksi}$$

بالاخره مقدار تنش نرمال در صفحه ای که تنش برشی ماکسیمم رخ میدهد به شکل زیر محاسبه میشود:

$$\sigma' = \sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{18-12}{2} = 3 \text{ ksi}$$

مثال: برای المان نمایش داده شده در شکل زیر مطلوبست محاسبه مقادیر تنش در المان در صورتی که a) المان به میزان 25 درجه در جهت عقربه های ساعت بچرخد. b) در صورتی المان 10 درجه خلاف عقربه های ساعت بچرخد.



جواب:

$\sigma_x = -40 \text{ MPa} \qquad \sigma_y = 60 \text{ MPa} \qquad \tau_{xy} = 20 \text{ MPa}$

$\dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 10 \text{ MPa} \qquad \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = -50 \text{ MPa}$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta$$

(a) $\theta = -25^\circ \qquad 2\theta = -50^\circ$

$$\sigma_{x'} = 10 - 50\cos(-50^\circ) + 20\sin(-50^\circ) = -37.5 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = +50\sin(-50^\circ) + 20\cos(-50^\circ) = -25.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{y'} = 10 + 50\cos(-50^\circ) - 20\sin(-50^\circ) = 57.5 \text{ MPa}$$

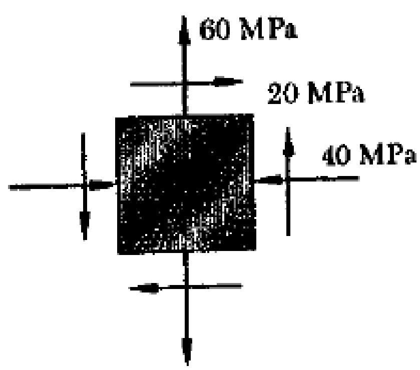
(b) $\theta = 10^\circ \qquad 2\theta = 20^\circ$

$$\sigma_{x'} = 10 - 50\cos(20^\circ) + 20\sin(20^\circ) = -30.1 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = +50\sin(20^\circ) + 20\cos(20^\circ) = 35.9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{y'} = 10 + 50\cos(20^\circ) - 20\sin(20^\circ) = 50.1 \text{ MPa}$$

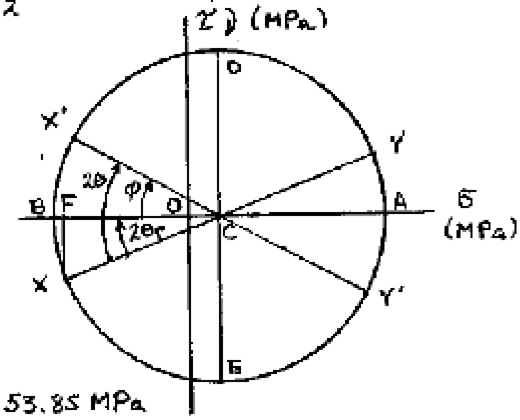
مثال: برای شرایط تنش نشان داده شده برای المان شکل زیر مطلوبست محاسبه تنشهای عمودی و برشی a) در صورتی که المان 25 درجه در جهت عقربه های ساعت بچرخد b) در صورتی که المان 10 درجه در خلاف عقربه های ساعت بچرخد.



جواب:

$\sigma_x = -40\ MPa \qquad \sigma_y = 60\ MPa \qquad \tau_{xy} = 20\ MPa$

$\sigma_{ave} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 10\ MPa$



Points

X: (−40 MPa , −20 MPa)

Y: (60 MPa, 20 MPa)

C: (10 MPa, 0)

$\tan 2\theta_p = \dfrac{FX}{FC} = \dfrac{20}{50} = 0.4$

$2\theta_p = 21.80^\circ \qquad \theta_p = 10.90^\circ$

$R = \sqrt{\overline{FC}^2 + \overline{FX}^2} = \sqrt{50^2 + 20^2} = 53.85\ MPa$

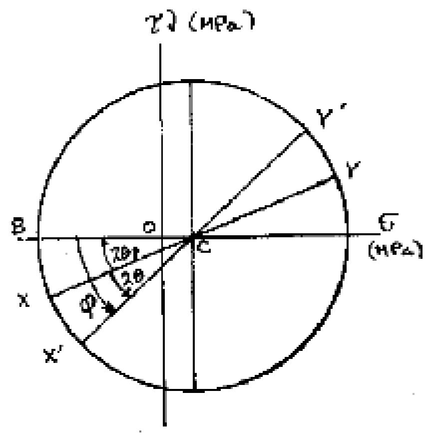
(a) $\theta = 25^\circ \qquad 2\theta = 50^\circ$

$\varphi = 2\theta - 2\theta_p = 50^\circ - 21.80^\circ = 28.20^\circ$

$\sigma_{x'} = \sigma_{ave} - R\cos\varphi = -37.5\ MPa$

$\tau_{x'y'} = -R\sin\varphi = -25.4\ MPa$

$\sigma_{y'} = \sigma_{ave} + R\cos\varphi = 57.5\ MPa$



(b) $\theta = 10^\circ \qquad 2\theta = 20^\circ$

$\varphi = 2\theta_p + 2\theta = 21.80^\circ + 20^\circ = 41.80^\circ$

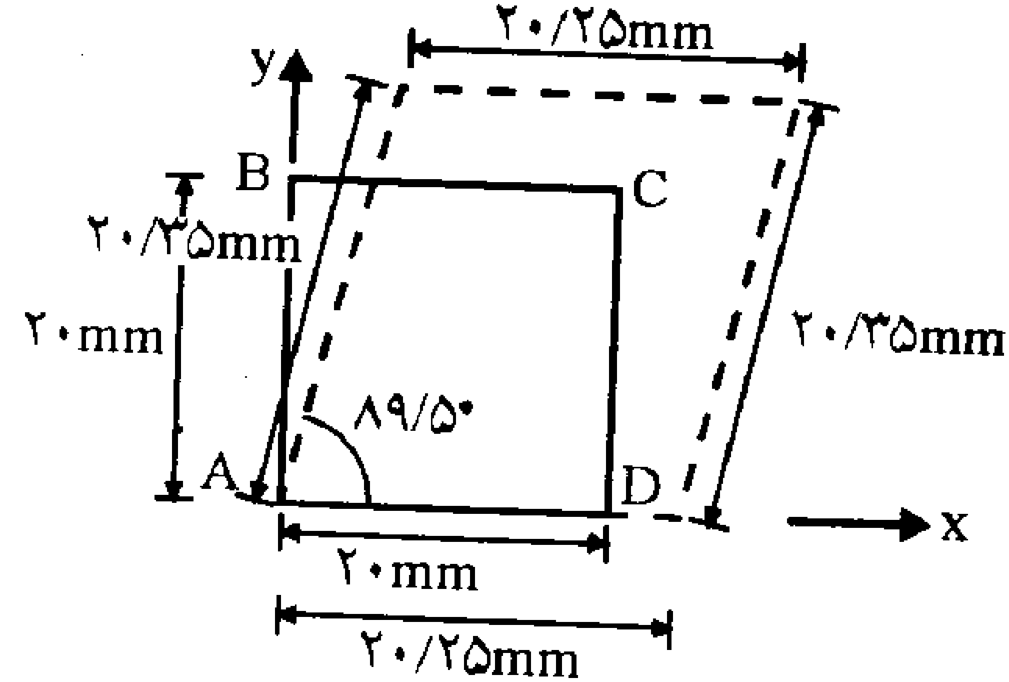
$\sigma_{x'} = \sigma_{ave} - R\cos\varphi = -30.1\ MPa$

$\tau_{x'y'} = R\sin\varphi = 35.9\ MPa$

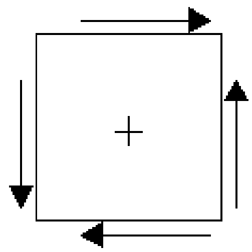
$\sigma_{y'} = \sigma_{ave} + R\cos\varphi = 50.1\ MPa$

مثال: صفحه مربع شکل ABCD به صورت خط چین تغییر شکل نموده است. کرنش محوری ایجاد شده در طول قطر AC چقدر است؟

(سراسری 82)



جواب : با توجه به شکل میتوان مقادیر کرنشها در جهات مختلف را محاسبه نمود. برای محاسبه کرنشهای عمودی مقادیر تغییر طول را به طول اولیه ضلع تقسیم میکنیم. چون تغییر طولها به صورت افزایش طول است ، مقادیر کرنشهای عمودی مثبت فرض در نظر گرفته میشود. مقدار تغییر زاویه المان هم نشان دهنده کرنش برشی المان است. برای تشخیص مثبت یا منفی بودن کرنش برشی باید دید که این کرنش برشی ناشی از چه تنش برشی است. اگر تنش برشی متناظر مثبت باشد، کرنش برشی نیز مثبت است و بالعکس. با توجه به شکل تنش برشی متناظر به شکل زیر خواهد بود که طبق آنچه قبلاً گفته شده است کرنش برشی مثبت خواهد بود.



$$\varepsilon_x = \frac{20.25-20}{20} = 0.0125$$
$$\varepsilon_y = \frac{20.35-20}{20} = 0.0175$$
$$\gamma_{xy} = 0.5^\circ = 0.5\times\frac{\pi}{180} = 0.0087$$

برای اینکه ما مقدار تغییر طول ایجاد شده در قطر AC را محاسبه کنیم، باید مقدار کرنش محوری در المان در صورت چرخش 45 درجه ای (به صورت پادساعتگرد) را به دست آوریم. بر این اساس مقدار زاویه چرخش 45 درجه و با مقدار مثبت (با توجه به پادساعتگرد بودن آن) خواهد بود و بر این اساس ما مقدار $\varepsilon_{x'}$ را محاسبه میکنیم. (مقدار $\varepsilon_{y'}$در اینجا نشان دهنده کرنش محوری در راستای قطر BD خواهد بود)

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}Cos2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}Sin2\theta$$
$$\varepsilon_{x'} = \frac{0.0125+0.0175}{2} + \frac{0.0125-0.0175}{2}Cos90 + \frac{0.0087}{2}Sin90 = 0.015+0+0.00435$$
$$\varepsilon_{x'} = .01935$$

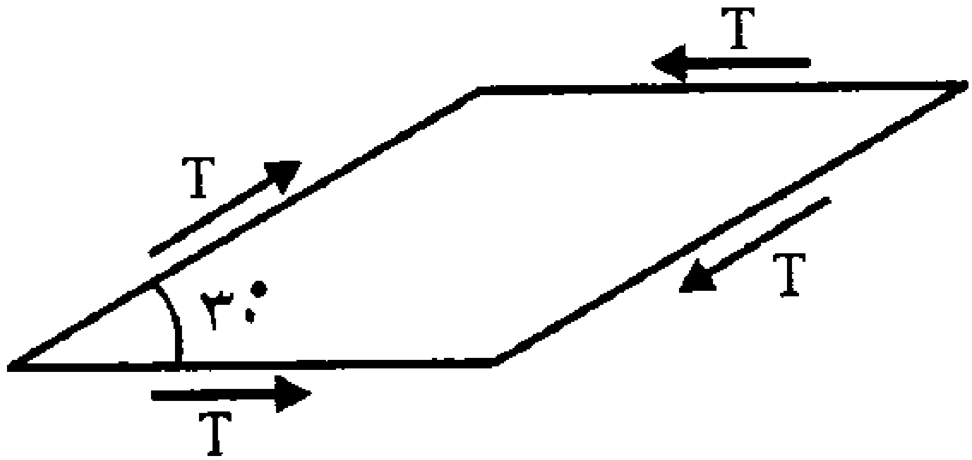
مثال:در صورتی که در یک وضعیت کرنش صفحه‌ای $\varepsilon_x = -400\times10^{-6}$ $\varepsilon_y = ۲۰۰\times۱۰^{-۶}, \gamma_{xy} = ۱۵۰\times۱۰^{-۶}$ **باشد، مطلوبست محاسبه ی حداکثر کرنش برشی مطلق.**

(سراسری 82)

جواب:

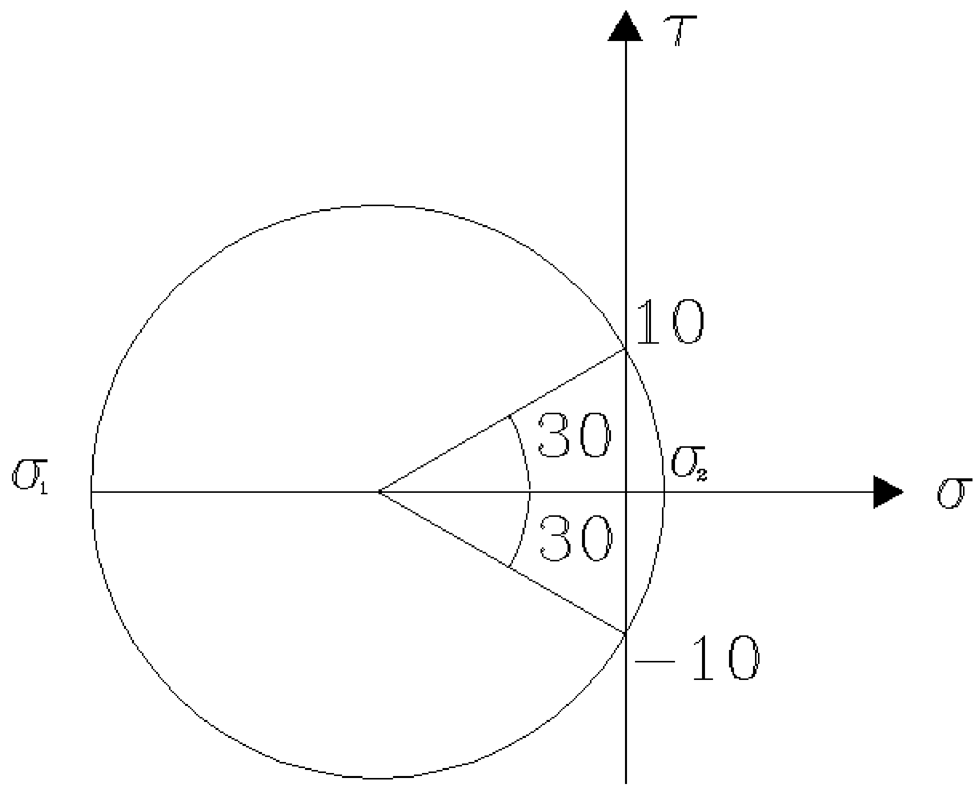
$$\gamma_{max} = 2R = \sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+\gamma_{xy}^2} = 10^{-6}\sqrt{(-400-200)^2+150^2} = 618\times10^{-6}$$

مثال: در یک نقطه از سازه ای ، المانی مطابق شکل نشان داده شده است. روی صفحات نشان داده شده ، تنش برشی مساوی 10Mpa و تنش عمودی صفر است. مقادیر تنشهای اصلی σ_1,σ_2 چقدر است؟ (سراسری 80)



جواب: در اینجا ما دو صفحه یکی به صورت افقی و دیگری با زاویه 30 درجه با افق (به صورت پادساعتگرد) داریم. هر یک از این دو صفحه دارای یک وضعیت تنش شامل یک تنش نرمال (عمودی) و یک تنش برشی میباشد که هر کدام از آنها نمایانگر یک نقطه از دایره موهر میباشند که بر این اساس ما مختصات دو نقطه از دایره موهر را خواهیم داشت. در هر دو صفحه مقدار تنش نرمال صفر و تنش برشی 10 مگاپاسکال است. در مورد علامت تنش برشی به این شرح عمل میکنیم. برای هر یک از دو راستا دو تنش برشی ترسیم شده که به دو سطح موازی المان وارد میشوند، تشکیل یک کوپل میدهند. اگر این کوپل ساعتگرد باشد علامت مثبت و در غیر این صورت مثبت در نظر گرفته میشوند. در اینجا دو تنش برشی که به سطوح افقی المان وارد میشوند تشکیل یک کوپل پادساعتگرد میدهند که در نتیجه علامت آنها منفی خواهد بود. بر عکس دو تنش برشی که به سطوح مایل المان وارد میشوند تشکیل کوپل ساعتگرد میدهند و علامت آنها مثبت

خواهد بود. پس ما دو نقطه به مختصات $(0,-10),(0,10)$ بر روی دایره موهر خواهیم داشت. با توجه به زاویه دو سطح المان که 30 درجه است، در دایره موهر نقطه ای که نشانگر تنش در سطح افقی المان است با چرخش 60 درجه ای و به صورت پادساعتگرد باید به نقطه دوم مربوط به وضعیت تنش در سطح مایل برسد. با توجه به موارد گفته شده دایره موهر مطابق شکل زیر خواهد بود:



شعاع دایره موهر به شرح زیر محاسبه میشود:

$$R = \frac{10}{\sin 30} = 20$$

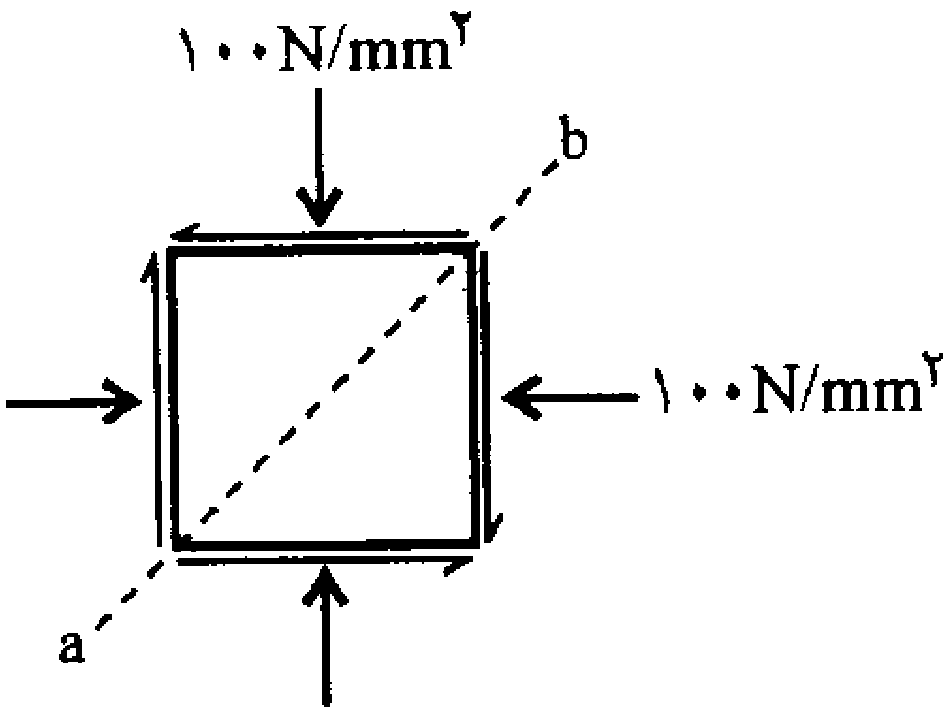
مختصات مرکز دایره نیز به شرح زیر محاسبه میشود:

$$\sigma_{ave} = -20\cos 30 = -17.32$$

تنشهای اصلی نیز به شرح زیر محاسبه میشوند:

$$\sigma_1 = -17.32 - 20 = -37.32 Mpa$$
$$\sigma_2 = -17.32 + 20 = +2.68 Mpa$$

مثال: برای المان مربع شکل نشان داده شده، هر دو تنش محوری و برشی روی صفحه قطری AB برابر صفر می باشد تنش برشی τ_{xy} چه قدر است؟ (سراسری 79)



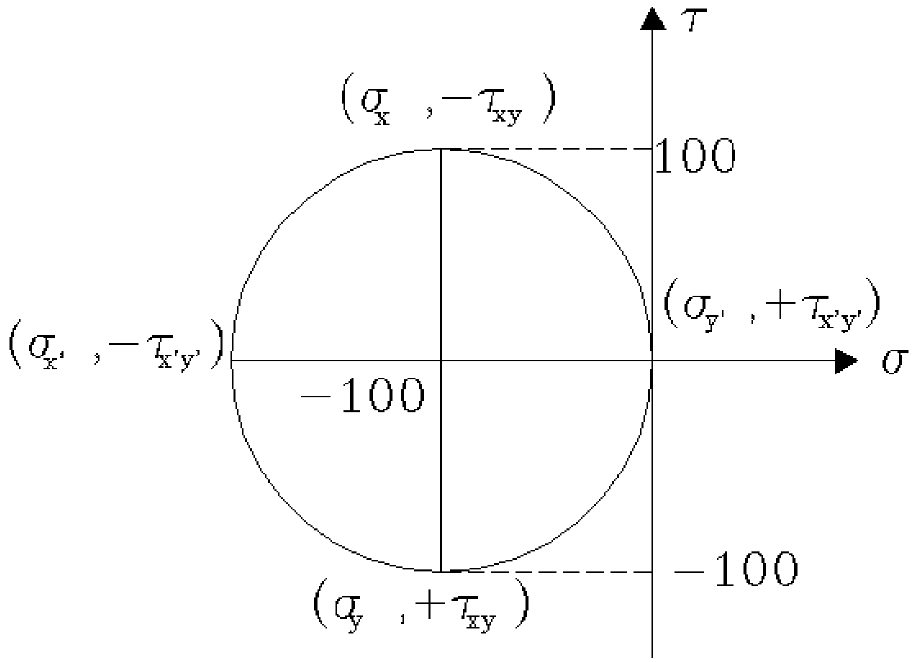
جواب:

$$\sigma_x = -100 \qquad \sigma_x - 100 \qquad \tau_{xy} = ?$$
$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-100-100}{2} = -100$$

با توجه به آن که σ_x , σ_y با هم مساوی هستند، قطری از دایره که نشان دهنده وضعیت تنش در المان قبل از دوران می باشد باید قطر عمودی دایره باشد. (تنها در این حالت است که مقادیر تنش عمودی بر روی دو وجه عمود بر هم المان با هم برابر میشود.) مقدار تنش عمودی در اینجا همان مختصات مرکز دایره و برابر 100- خواهد بود. در اینجا مقدار تنش برشی نیز برابر شعاع دایره موهر خواهد بود که البته این شعاع در این

مرحله برای ما نامشخص است. برای اینکه به وضعیت تنش بر روی قطر ab برسیم، باید المان را 45 درجه به صورت پادساعتگرد بچرخانیم. این دوران بر روی دایره موهر 90 درجه و پادساعتگرد خواهد بود. قطر عمودی پس از چرخش 90 درجه ای تبدیل به قطر افقی میشود. دراین حالت مقدار تنش برشی صفر خواهد شد. مطابق صورت سوال در قطر ab علاوه بر تنش برشی مقدار تنش نرمال نیز صفر است که بر این اساس لازم است که دایره موهر بر محور عمودی مماس باشد و به این ترتیب شعاع دایره موهر برابر 100 میگردد و قطعاً مقدار قدر مطلق تنش برشی در حالت قبل از چرخش نیز برابر 100 خواهد شد. بر روی قطر مایل تنش عمودی مورد نظر ما σ_y' است. پس در نیتجه انتهایی از قطر عمودی دایره که نشانگر σ_y است، پس از چرخش 90 درجه ای به صورت پادساعتگرد به نقطه ای خواهد رسید که نشانگر وضعیت تنش در صفحه ab است. بر این اساس انتهایی از قطر عمودی نشانگر وضعیت تنش σ_y خواهد بود که در زیر محور افقی قرار دارد. با توجه به اینکه این نقطه دارای مختصات (σ_y,τ_{xy}) است و مقدار تنش برشی متناظر با این نقطه 100- است، پس مقدار تنش برشی τ_{xy} نیز همان عدد 100 البته با علامت منفی خواهد بود.

$$\tau_{xy} = -100Mpa$$



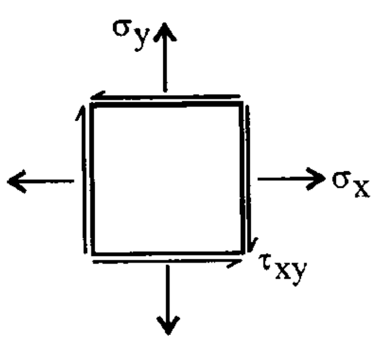
مثال: در شکل زیر المان ابتدا به شکل مربع است. پس از اعمال تنشهای نشان داده شده، طول قطرهای المان تغییر نمیکند. کدام رابطه صحیح است؟ (سراسری 78)

1- $\tau_{xy} \neq 0, \sigma_x = \sigma_y = 0$

2- $\tau_{xy} = 0, \sigma_x \neq 0, \sigma_y \neq 0$

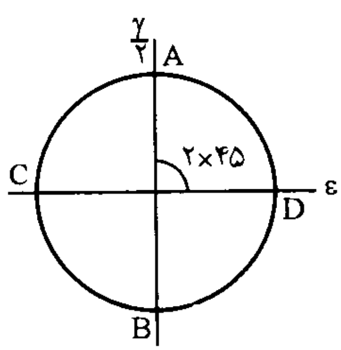
3- $\tau_{xy} \neq 0, \sigma_x = -\sigma_y$

4- $\tau_{xy} = 0, \sigma_x = -\sigma_y$



جواب: با توجه به ثابت بودن طول قطرهای مربع نتیجه میشود که کرنش در راستای هر دو قطر مربع صفر است. یعنی در صورت چرخش 45 درجه ای

المان (و 90 درجه ای بر روی دایره موهر) مقدار کرنش نرمال در هر دو راستای عمود بر هم x’ و y’ صفر خواهد شد ($\varepsilon_{x'} = \varepsilon_{y'} = 0$).پس قطری از مربع که نمایشگر وضعیت تنش پس از چرخش است،(با توجه به مساوی بودن کرنشهای نرمال المان مایل در در دو صفحه اصلی آن)، یک قطر عمودی خواهد بود. همچنین با توجه به اینکه این دو مقدار (کرنشهای عمودی) صفرند، مرکز دایره نیز منطبق بر مبدا مختصات میگردد. با توجه به عمودی بودن قطر پس از چرخش 90 درجه ای ، قطری از دایره که نمایش دهنده وضعیت کرنش قبل از دوران است، قطر افقی دایره خواهد بود که بر این اساس قبل از چرخش المان مقدار کرنش برشی و به تبع آن مقدار تنش برشی صفر خواهند بود. همچنین با توجه به اینکه مرکز دایره بر روی مبدا مختصات قرار گرفته است، میتوان نتیجه گرفت که مقادیر کرنش عمودی در هر المان با هر زاویه نسبت به هم قرینه میباشند ($\varepsilon_x = -\varepsilon_y$). در شکل زیر که مربوط به دایره موهر کرنش است ، قطر AB نشان دهنده وضعیت کرنش پس از چرخش و قطر CD نشان دهنده وضعیت کرنش قبل از چرخش است.

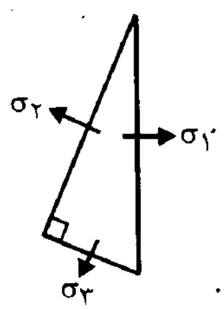


$$\gamma_{xy} = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = \gamma_{xy}.G = 0$$

$$\varepsilon_{x'} = \varepsilon_{y'} = 0$$
$$\varepsilon_x = -\varepsilon_y$$
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$$
$$\varepsilon_x = -\varepsilon_y \Rightarrow \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) = \frac{1}{E}(-\sigma_y + \nu\sigma_x)$$
$$\Rightarrow \sigma_x - \nu\sigma_y = -\sigma_y + \nu\sigma_x$$
$$\Rightarrow (1-\nu)\sigma_x = -(1-\nu)\sigma_y \Rightarrow \sigma_x = -\sigma_y$$

بر این اساس گزینه چهارم صحیح خواهد بود.

مثال: در المانی تنشهای برشی روی صفحات نشان داده شده صفر است. کدام گزینه درست میباشد؟(عمران 78)



۱) $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

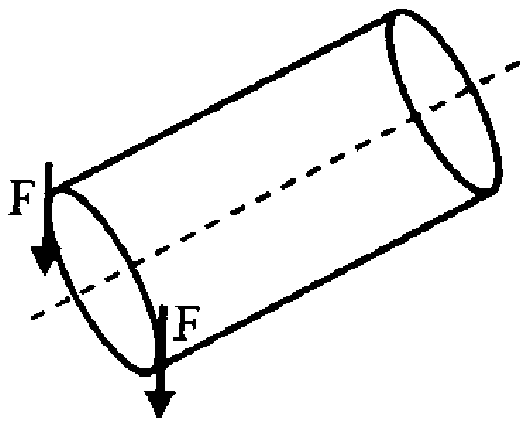
۲) $\sigma_1 = 0$ ، $\sigma_2 = \sigma_3$

۳) $\sigma_1 = \sigma_2\sqrt{2}$ ، $\sigma_2 = \sigma_3$

۴) فقط موقعی که هر سه تنش صفر باشند این حالت بوجود می‌آید.

جواب: بر روی دایره موهر نقاطی که دارای تنش برشی صفر هستند نقاطی از دایره هستند که محور افقی (محور تنشهای عمودی) را قطع میکنند. در حالت معمول دایره موهر تنها در دو نقطه محور افقی را قطع میکند. اما در اینجا در سه وجه مقدار تنش برشی صفر شده است. برای آنکه این مساله امکانپذیر گردد ، لازم است که دایره موهر تبدیل به تنها یک نقطه گردد که در این حالت در تمامی حالات تنش برشی صفر خواهد شد. وقتی دایره تبدیل به نقطه گردد مقادیر تنش عمودی در تمامی وجوه نیز با یکدیگر مساوی و برابر مختصات مرکز دایره میگردد. بر این اساس گزینه یک صحیح میباشد.

مثال: هر گاه کوپل T=FD به دو انتهای یک میله به قطر d و سطح A اعمال شود، ماکسیمم تنش کششی در میله چقدر خواهد بود؟ (سراسری 75)

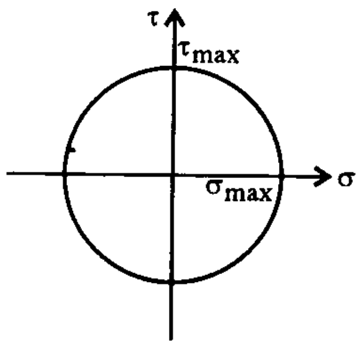


جواب: همانطور که در شکل دیده میشود، به میله یک کوپل پیچشی وارد میشود. لنگر پیچشی در مقطع دایره ای تنها یک تنش برشی به وجود می آورد. مقدار ماکسیمم این تنش برشی به شرح زیر قابل محاسبه است:

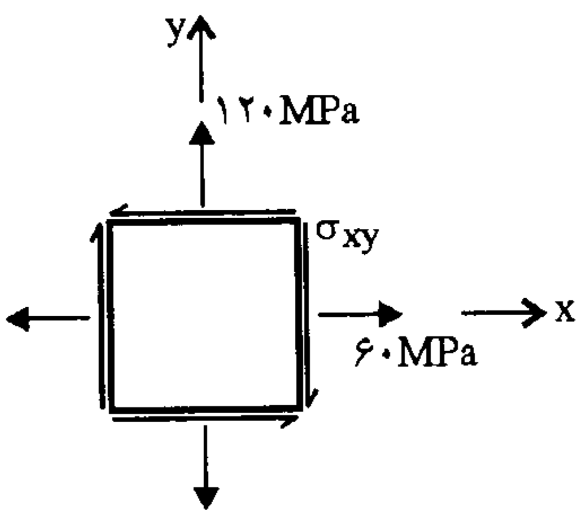
$$\tau = \frac{T.r}{J} = \frac{F.d.\frac{d}{2}}{\pi\frac{d^4}{2}} = \frac{F}{\pi d^2}$$

اما آنچه که در صورت سوال خواسته شده است مقدار ماکسیمم تنش کششی است. برای به دست آوردن ماکسیمم تنش کششی از دایره موهر کمک میگیریم. در حالت بالا که تنش برشی ماکسیمم رخ میدهد، هیچ تنش عمودی دیگری به المان وارد نمیشود و بر این اساس ما بر روی نقطه ای از دایره موهر منطبق بر محور عمودی هستیم و مرکز دایره نیز روی مبدا مختصات قرار دارد. در این حالت ماکسیمم تنش عمودی (به صورت کششی یا فشاری) برابر شعاع دایره خواهد شد که این شعاع نیز همان مقدار تنش برشی

ماکسیمم میباشد. پس مقدار ماکسیمم تنش کششی همان مقدار محاسبه شده در بالا برای تنش برشی ماکسیمم است.



مثال: برای المان نمایش داده شده در شکل زیر حدود e_{xy} را چنان تعیین نمایید که تنش max کوچکتر یا مساوی 150 MPa شود؟ (عمران آزاد 82)



جواب:

$\sigma_x = 60 \qquad \sigma_y = 120$

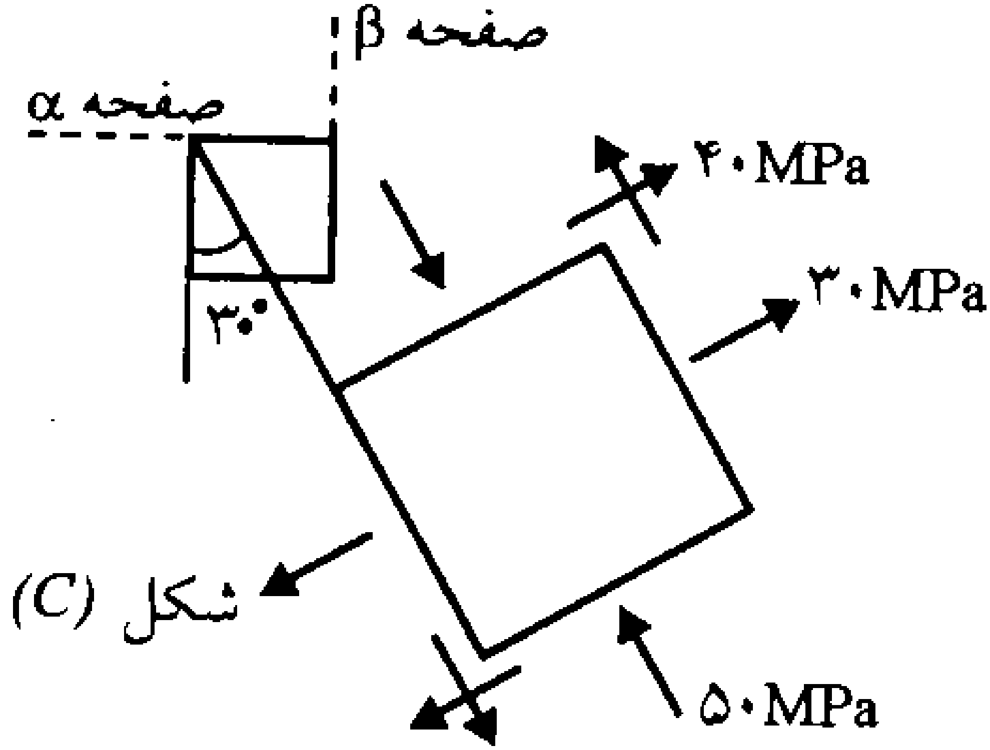
$\tau_{xy} = ? \qquad \tau_{\max} \leq 150$

$$\tau_{\max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2} \leq 150$$

$$\sqrt{\left(\frac{120-60}{2}\right)^2 + \tau_{XY}^2} = \sqrt{900 + \tau_{XY}^2} \leq 150$$

$900 + \tau_{XY}^2 \leq 22500 \qquad \tau_{XY}^2 \leq 21600 \rightarrow -146.97 \leq \tau_{xy} \leq +146.97$

مثال: در المان مایل نمایش داده شده در شکل زیر با توجه به مقادیر تنش، مطلوبست محاسبه مقادیر تنش در صفحات α, β و محاسبه تنشهای اصلی (آزاد 79)



جواب: در المان مایل جهت ’x را به موازات تنش عمودی 30Mpa و جهت ’y را به موازات تنش عمودی 50Mpa- فرض میکنیم . به این ترتیب مقدار تنش برشی در المان مایل نیز مثبت خواهد شد. صفحات α, β و نیز به ترتیب دارای تنش عمودی σ_y, σ_xمیباشند. در اینجا المان مایل را مبنا فرض کرده وتنش در المان افقی را در

صورت چرخش 30 درجه ای به صورت ساعتگرد محاسبه میکنیم. بر این اساس چون چرخش ساعتگرد است، تغییر زاویه با علامت منفی در نظر گرفته میشود.

$$\sigma_{x'} = 30, \sigma_{y'} = -50, \tau_{x'y'} = +40$$

$$\sigma_x = \frac{\sigma_{x'} + \sigma_{y'}}{2} + \frac{\sigma_{x'} - \sigma_{y'}}{2} Cos\,2\theta + \tau_{x'y'} Sin2\theta$$

$$\sigma_\beta = \sigma_x = \frac{30-50}{2} + \frac{30+50}{2} Cos(-60) + 40 Sin(-60) = -24.64 Mpa$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_{x'} + \sigma_{y'}}{2} - \frac{\sigma_{x'} - \sigma_{y'}}{2} Cos2\theta - \tau_{x'y'} Sin2\theta$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_y = \frac{30-50}{2} - \frac{30+50}{2} Cos(-60) - 40 Sin(-60) = 4.64 Mpa$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\sigma_{x'} - \sigma_{y'}}{2} Sin2\theta + \tau_{x'y'} Cos2\theta = -\frac{30+50}{2} Sin(-60) + 40 Cos(-60) = 54.64 Mpa$$

برای به دست آوردن مقادیر تنشهای اصلی نیز به شرح زیر عمل میکنیم:

$$\sigma_{\max,\min} = \sigma_{ave} \pm R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

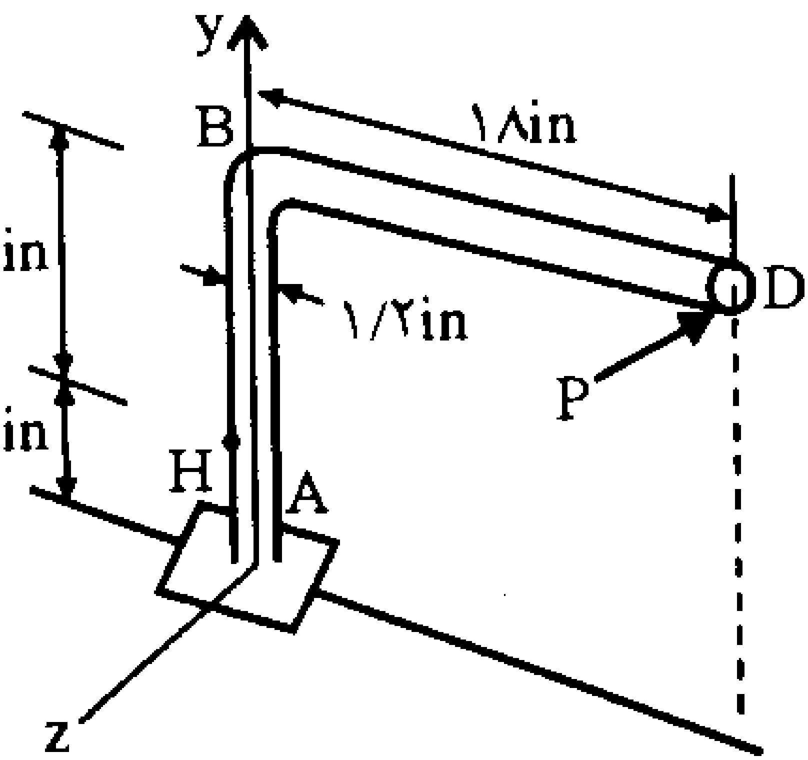
$$\sigma_{\max} = \frac{30-50}{2} + \sqrt{\left(\frac{30+50}{2}\right)^2 + 40^2} = 46.6 Mpa$$

$$\sigma_{\min} = \frac{30-50}{2} - \sqrt{\left(\frac{30+50}{2}\right)^2 + 40^2} = -66.6 Mpa$$

$$tag2\alpha = \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) = \left(\frac{2 \times 40}{30+50}\right) = 1 \Rightarrow 2\alpha = 45^\circ \Rightarrow \alpha = 22.5^\circ$$

چون مقدار زاویه مثبت به دست آمده است این زاویه باید به صورت پادساعتگرد در نظر گرفته شود. این زاویه با المان مایل باید سنجیده شود (چون مقادیر قرار داده شده در روابط، تنشهای المان مایل بودند). یعنی المان مایل برای رسیدن به صفحات اصلی باید 22.5 درجه به صورت پادساعتگرد بچرخد. با توجه به اینکه این المان خود دارای زاویه 30 درجه با راستای قائم و افقی است، پس از چرخش زاویه ای که با راستای افقی و قائم میسازد برابر 52.5 درجه خواهد بود.

مثال: در شکل زیر برای نقطه H مطلوبست محاسبه تنشهای اصلی و زاویه المانی که این تنشها در آن رخ میدهد. مقدار بار P برابر 150lb است. (آزاد 76)



جواب: نیروی P وارده شده به نقطه D ایجاد یک لنگر پیچشی و یک لنگر خمشی در مقطعی از میله که نقطه H از آن میگذرد، میکند. (یک نیروی برشی به میزان P نیز در این مقطع ایجاد میشود، ولی با توجه به اینکه نقطه H در قسمت بیرونی مقطع قرار دارد، این نیرو ایجاد تنش برشی در این نقطه نمیکند.) لنگر خمشی در نقطه H ایجاد تنش عمودی در راستای y و لنگر پیچشی ایجاد تنش برشی میکند. با توجه به جهت لنگر خمشی در نقطه H یک تنش کششی ایجاد میگردد. مقدار تنش نرمال در راستای محور x صفر خواهد بود.

$$T = 150 \times 18 = 2700,\ M = 150 \times 10 = 1500$$

$$\sigma_y = \frac{M.C}{I} = \frac{1500 \times 0.6}{\dfrac{\pi \times 0.6^4}{4}} = 8842 \frac{lb}{in^2} = 8.84 ksi$$

$$\tau = \frac{T.C}{J} = \frac{2700 \times 0.6}{\dfrac{\pi \times 0.6^4}{2}} = 7958 \frac{lb}{in^2} = 7.96 ksi$$

$$\sigma_{\max,\min} = \sigma_{ave} \pm R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{0 + 8.84}{2} + \sqrt{\left(\frac{0 - 8.84}{2}\right)^2 + 7.96^2} = 13.52 ksi$$

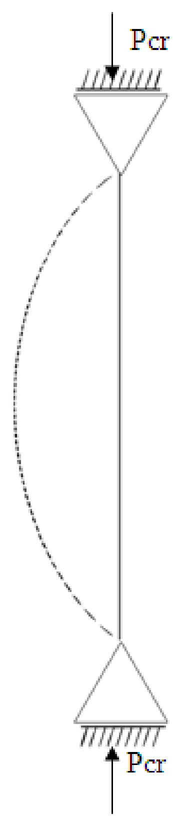
$$\sigma_{\max} = \frac{0 + 8.84}{2} - \sqrt{\left(\frac{0 - 8.84}{2}\right)^2 + 7.96^2} = -4.68 ksi$$

$$tag 2\alpha = \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) = \left(\frac{2 \times 7.96}{-8.84}\right) = -1.8 \Rightarrow 2\alpha = -61^\circ \Rightarrow \alpha = -30.5$$

کمانش در ستونها

در اثر اعمال بار فشاری به ستونها، ستون تمایل دارد که از زیر بار در راستای جانبی دور شود. با افزایش بار فشاری و رسیدن آن به مقدار بحرانی کمانش، ستون از شکل عادی خود خارج می شود و به صورت کمانی در می آید که این پدیده را کمانش در ستون می نامند.

بار بحرانی فشاری که باعث ایجاد این پدیده می شود بار بحرانی کمانش نامیده می شود و طبق فرمول اویلر و از رابطه ی زیر محاسبه می شود:



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(K\ell)^2}$$

L: طول مهار نشده ستون

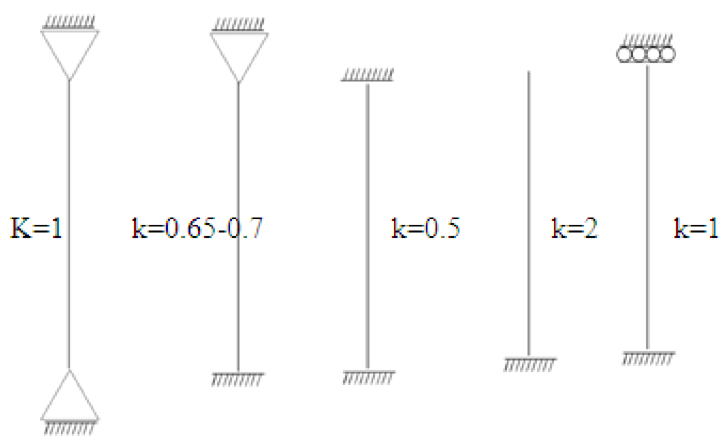
K: ضریب طول ستون.

E: مدول الاستیسیته.

I: ممان دوم اینرسی.

منظور از مهار هر چیزی است که بتواند جلوی کمانش ستون را بگیرد و به طور مثال تیرهای متصل به ستون در طبقات، باد بندها و دیوارهای برشی نقش مهار ستون را میتوانند داشته باشند در این حالت طول مهار نشده ستون فاصله دو مهار متوالی در ستون می باشد اگر هیچ گونه مهاری وجود نداشته باشد، کل طول ستون در نظر گرفته می شود.

K، ضریب طول ستون می باشد و بستگی به شرایط تکیه گاهی دو انتهای خود دارد. برای برخی از شرایط متداول تکیه گاهی این ضریب به شکل زیر است:



برای حالت یک سر گیردار ، یک سرمفصل ضریب طول به صورت تئوریک برابر 0.65 است ولی در عمل بعضاً در جهت اطمینان این عدد برابر 0.7 در نظر گرفته میشود.

بار محوری کمانش باید حداقل حول دو محور اصلی x,y ستون محاسبه شود و مقدار مینیمم این حالت ها به عنوان بار بحرانی کمانش در نظر گرفته شود. (در برخی از مقاطع

نظیر نبشیها محور بحرانی محور x و y نیست و یک محور مایل محور بحرانی کمانش خواهد بود. برای نبشی با دو بال مساوی این محور با زاویه 45 درجه با محور اصلی میباشد.)

$$P_{crx} = \frac{\pi^2 EI}{(K_x.\ell_x)^2} \qquad P_{cry} = \frac{\pi^2 EI}{(K_y.\ell_y)^2}$$

$$P_{cr} = \min(P_{crx}, P_{cry})$$

برای محاسبه ی بار کمانش مقادیر l و K حول دو محور x,y ممکن است با هم متفاوت باشند.

تنش بحرانی کمانش:

با تقسیم بار بحرانی کمانش به مساحت ستون تنش بحرانی کمانش بدست می آید.

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A}$$

$$= \frac{\pi^2 EI}{A(K\ell)^2} = \frac{\pi^2 Er^2}{(K\ell)^2}$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \Rightarrow \frac{I}{A} = r^2$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{K\ell}{r}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

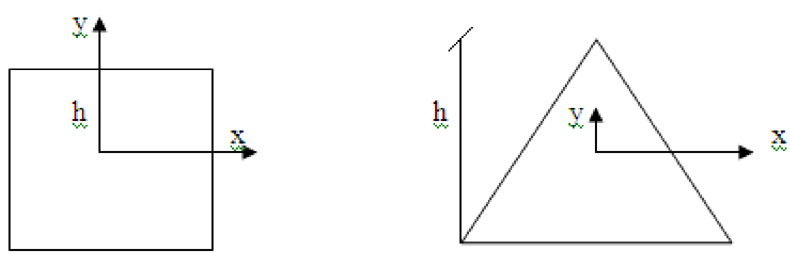
ضریب لاغری ستون $\Leftarrow \gamma = \frac{K\ell}{r}$

* هر چقدر لاغری ستون بیشتر شود احتمال کمانش آن نیز اضافه می شود و تنش بحرانی کمانش کم می شود.

ستون بهینه: ستون زمانی بهینه است که بار بحرانی کمانش آن حول هر دو محور اصلی آن با هم برابر شوند. لازمه این موضوع آن است که ضریب لاغری ستون حول هر دو محور اصلی آن با هم برابر باشد.

اگر مقادیر l,K حول هر دو محور یکسان باشد کافی است که مقادیر r یا I حول دو محور اصلی با هم برابر باشند.

مثال: برای دو شکل مثلث و مستطیل به عرض b و ارتفاع h مطلوبست محاسبه ی شعاع ژیراسیون حول محور x محورهای x,y از مرکز ثقل شکل عبور می کنند. (آزاد 79)



مستطیل :

$$r_x=\sqrt{\frac{Ix}{A}}=\sqrt{\frac{\frac{bh^3}{12}}{bh}}=\sqrt{\frac{h^2}{12}}=\frac{h}{2\sqrt{3}}$$

$$I_x=\frac{bh^3}{12}\ ,\ \ A=bh$$

مثلث :

$$I_x=\frac{bh^3}{36}\ ,\ \ A=\frac{1}{2}bh$$

$$r=\sqrt{\frac{\frac{bh^3}{36}}{\frac{bh}{2}}}=\sqrt{\frac{h^2}{18}}=\frac{h}{3\sqrt{2}}$$

مثال: نسبت ضریب لاغری ستونی با مقطع مربعی به عرض b به ضریب لاغری ستونی هم جنس و کاملاً مشابه با مقطع دایره ای به قطر r به شرط آن که سطح مقطع آنها با هم یکسان باشد چه قدر است؟ (آزاد 82)

جواب:

$$A_۱ = A_۲ \Rightarrow b^۲ = \pi r^۲ \Rightarrow b = r\sqrt{\pi}$$

برای مقطع 1 (مربع) و مقطع 2 (دایره) خواهیم داشت:

$$\lambda_1=\frac{k_1.\ell_1}{r_1}, r_1=\frac{b}{2\sqrt{3}}=\frac{r\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}}$$

$$\lambda_1=\frac{k_1\ \ell_1}{\left(\frac{r\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}}\right)}\to\frac{2\sqrt{3}K_1.\ell_1}{r\sqrt{\pi}}$$

$$\lambda_2=\frac{K_2.\ell_2}{r_2}, r_2=\sqrt{\frac{I}{A}}=\sqrt{\frac{\frac{\pi r^4}{4}}{\pi r^2}}=\sqrt{\frac{r^2}{4}}=\frac{r}{2}$$

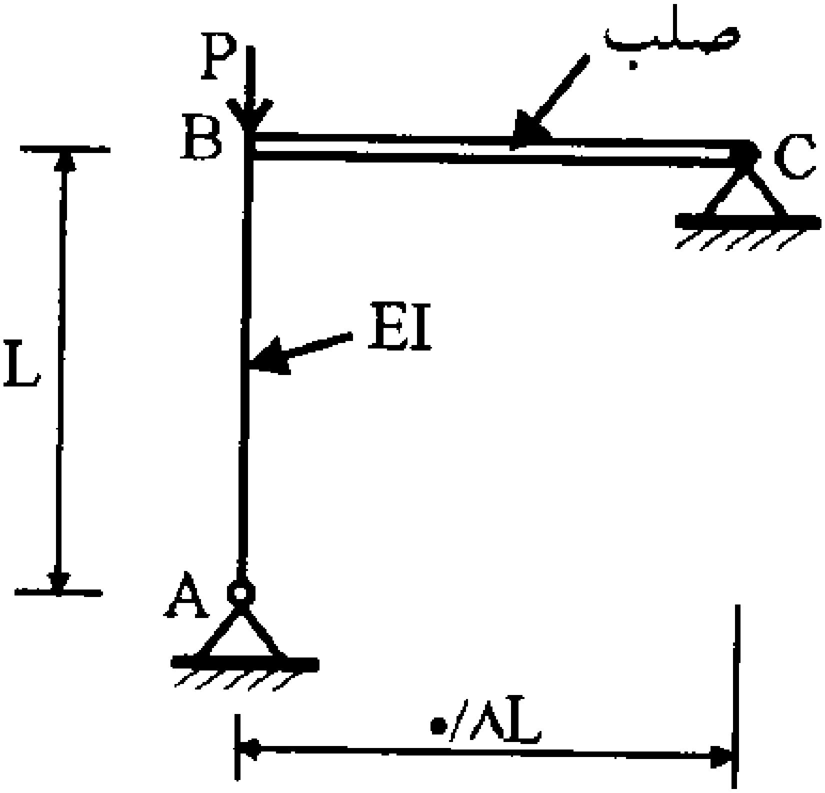
$$\lambda_2=\frac{K_2.\ell_2}{\frac{r}{2}}=\frac{2K_2\ell_2}{r}$$

چون دو ستون مشابهند k, l آنها نیز با هم یکسان است.

$$K_۱ = K_۲ \qquad \ell_۱=\ell_۲$$

$$\frac{\lambda_۱}{\lambda_۲}=\frac{\frac{۲\sqrt{۳}}{r\sqrt{\pi}}}{\frac{۲}{r}}=\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{\pi}}=۰/۹۸$$

مثال: بار بحرانی کمانش میله AB در شکل زیر چقدر است؟ (سراسری 75)



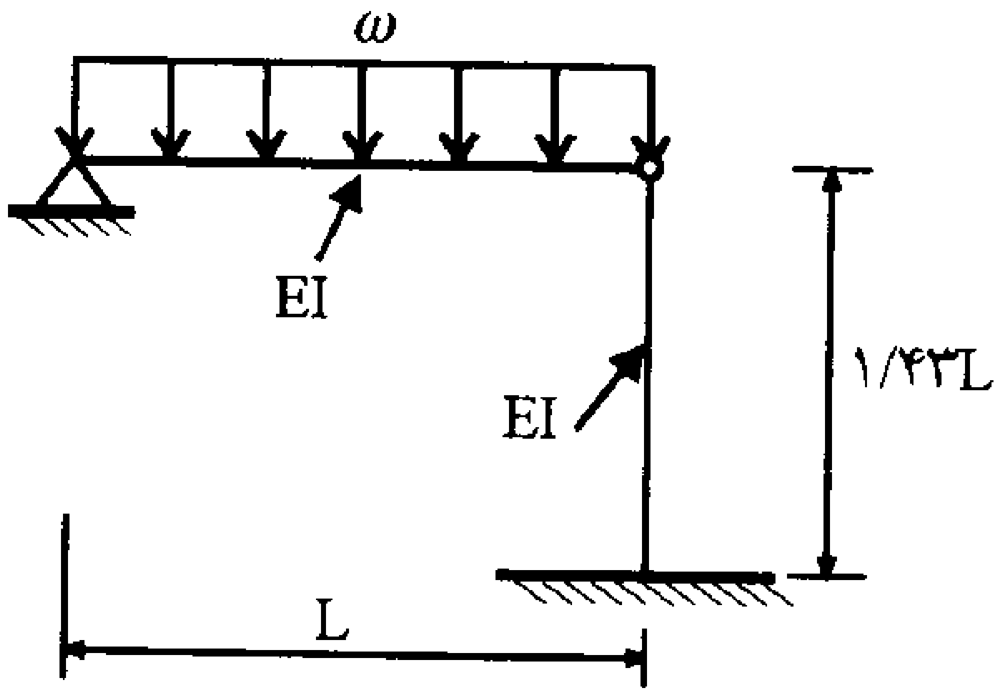
جواب:

چون میله BC صلب است جلوی دوران انتهای B را می گیرد و با توجه به وجود تکیه گاه مفصلی C اجازه حرکت جانبی این تکیه گاه نیز در نقطه B گرفته شده است و پس عملاً نقطه ی B دارای شرایط تکیه گاهی گیردار می باشد.

$$P_{cr} = \frac{\pi^{۲} EI}{(۰/۷\ell)^{۲}}$$

مثال: در شکل زیر حداکثر مقدار w برای آن که ستون کمانش نکند چه قدر است؟

(سراسری 77)



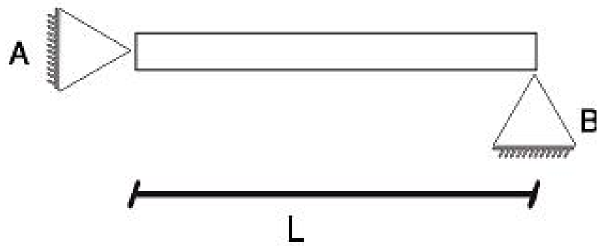
جواب:

با توجه به تقارن، نصف بار تیر به ستون و نصف دیگر به تکیه گاه سمت چپ می رسد. همچنین با توجه به اتصال مفصلی تیر به ستون ، انتهای بالای ستون اجازه دوران دارد. از طرف دیگر به علت وجود یک تکیه گاه مفصلی در سمت چپ تیر عملاً جلوی حرکت جانبی انتهای بالای ستون گرفته میشود. بر این اساس ستون دارای شرایط یکسرگیردار و یکسرمفصل خواهد بود و ضریب طول آن 0.65 یا 0.7 میتواند فرض شود.

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(0/7\times 1/43\ell)^2}\approx\frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$$

$$P_{cr}=\frac{W\ell}{2}=\frac{\pi^2 EI}{\ell^2}\Rightarrow W=\frac{2\pi^2 EI}{\ell^3}$$

مثال: مقدار تغییرات درجه حرارتی ΔT که قادر است ستونی دو سر مفصلی به طول l و ضریب استنباطی α را به حد کمانش برساند چه قدر است؟ (سراسری 81)



جواب: چون کمانش در اثر بار فشاری ایجاد می شود تغییرات دما باید به صورت افزایش دما باشد تا میله AB تحت فشار قرار گیرد. تکیه گاه B را حذف کرده و به جای آن واکنش این تکیه گاه به صورت فشاری و به مقدار R_B را اضافه میکنیم. یک معادله سازگاری نیز مبنی بر صفر بودن تغییر شکل افقی این تکیه گاه مینویسیم. سپس مقدار تغییر طول این میله را محاسبه کرده و با صفر مساوی قرار میدهیم. تغییر طول میله بخشی ناشی از نیروی R_B و بخش دیگری ناشی از تغییر دما است. به این روش مقدار R_B محاسبه شده و بر اساس آن میتوان بار بحرانی کمانش ستون و مقدار تغییر دمایی که باعث آن میشود را به دست آورد.

معادله سازگاری: $\Delta B = ٠$

$$\Delta B = \ell \alpha \Delta T - \frac{R_B L}{AE} = 0 \quad \rightarrow R_B = AE.\alpha.\Delta T$$

$$K = 1 \qquad P_{cr} = R_B = \frac{\pi^2 EI}{(k.\ell)^2} \Rightarrow AE\alpha\Delta T = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{\pi^2 I}{A\ell^2 \alpha} = \frac{\pi^2 r^2}{\ell^2.\alpha}$$

مثال: سه ستون دو سر مفصل که جنس و طول یکسانی دارند، می توانند در هر جهتی کمانش کنند. با توجه به این که مقطع ستونها مثلث متساوی الاضلاع، دایره و مربع می باشند و مساحت مقطع هر سه ستون با هم مساوی است کدام مقطع دارای بار بحرانی بیشتری است؟ (سراسری 80)

جواب: دایره را به شعاع r ، مربع را به عرض b و مثلث متساوی الاضلاع را به ضلع a در نظر میگیریم. (مثلث را مقطع 1، مربع را مقطع شماره 2 و دایره را مقطع شماره 3 میگیریم)

همه را بر حسب a می نویسیم:

$$A_1 = A_2 = A_3 \Rightarrow \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \pi r^2 = b$$
$$\Rightarrow b = r\sqrt{\pi} \quad , \quad a^2 = \frac{4\pi r^2}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{2r\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{3}}$$

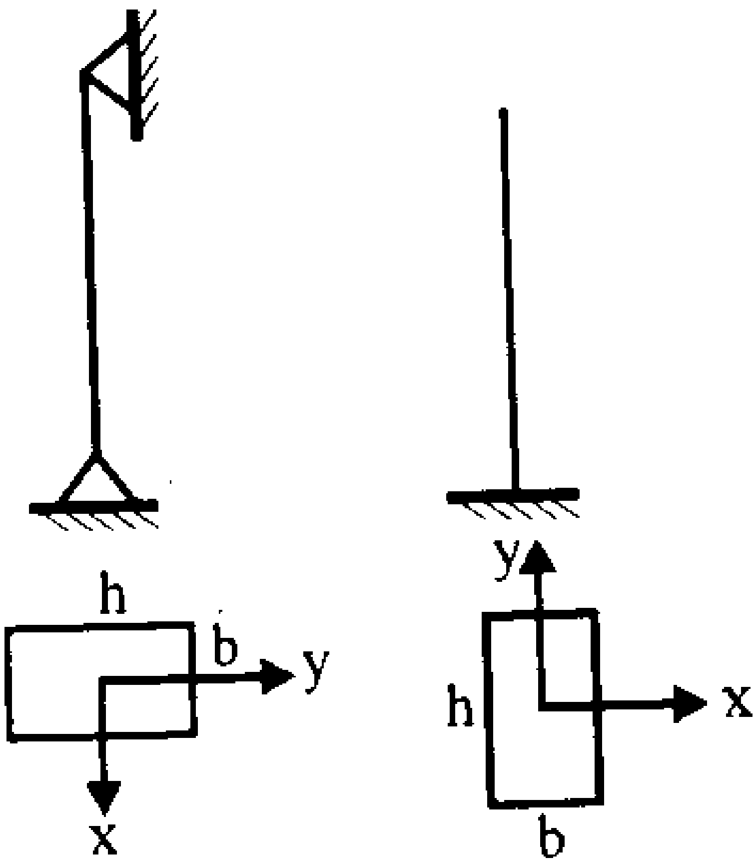
با توجه به آن که سطح مقطع سه ستون با هم برابر است، ظرفیت ستونی بیشتر است که لاغری آن کمتر باشد با توجه به یکسان بودن K , L این مساله تنها بستگی به r یعنی شعاع ژیراسیون مقاطع دارد. برای کاهش لاغری شعاع ژیراسیون باید بیشتر شود. با توجه به یکسان بودن سطح مقطع برای بیشتر شدن r باید I بیشتر شود. پس مقطعی بیشترین باربری را دارد که ممان اینرسی آن بیشتر باشد.

$$I_1 = \frac{a \times \left[\frac{a\sqrt{3}}{2}\right]^3}{36} = \frac{a^4 \times 3\sqrt{3}}{288}$$
$$= 0.018a^4 = 0.018 \times \left[\frac{2r\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{3}}\right]^4$$
$$0.018 \times (2.69r)^4 = 0.94r^4$$
$$I_2 = \frac{\pi r^4}{4} = 0.785r^4$$
$$I_3 = \frac{b^4}{12} = \frac{(r\sqrt{\pi})^4}{12} = \frac{\pi^2 r^4}{12} = 0.82r^4$$

ارتفاع مثلث: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

بر این اساس مقطع مثلث متساوی الاضلاع دارای باربری بیشتری نسبت به بقیه مقاطع میباشد.

مثال: شرایط تکیه گاهی یک ستون با مقطع مستطیل در دو امتداد مطابق شکل رو به رو است. نسبت h/b بهینه چه قدر است؟ (سراسری 79)



جواب:

برای این ستون باید دو حالت کمانش حول دو محور X و Y مورد بررسی قرار گیرد.

برای آنکه ستون بهینه باشد لازم است که مقدار بار بحرانی برای کمانش حول دو محور با هم برابر باشد. برای این منظور کافی است که مقدار ضریب لاغری حول هر دو محور با هم برابر باشند.

$$\lambda_x = \lambda_y$$

$$\ell_x = \ell_y$$

$$k_x = 1, k_y = 2$$

$$\frac{1 \times \ell x}{r_x} = \frac{2 \times \ell_y}{r_y} \Rightarrow r_x = \frac{r_y}{2}$$

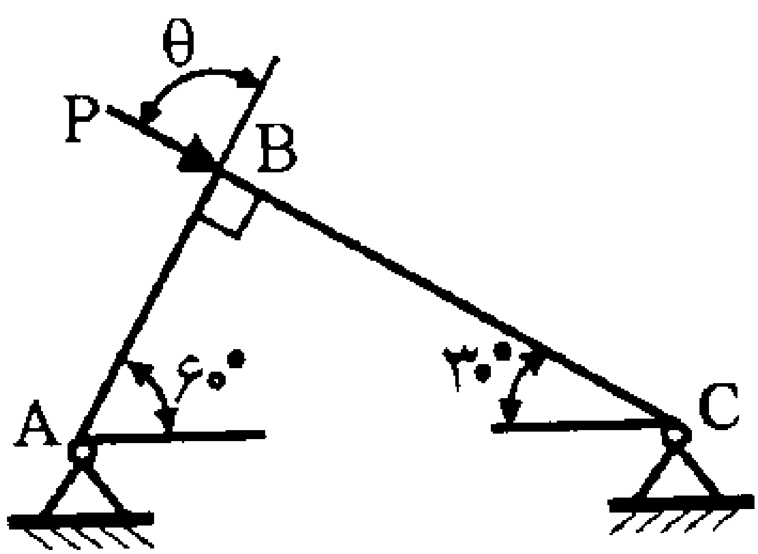
$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{bh^3}{12}}{bh}} = \frac{h}{2\sqrt{3}}$$

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{b^3h}{12}}{bh}} = \frac{b}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{h}{2\sqrt{3}} = \frac{b}{4\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{h}{b} = 0.5$$

مثال: خرپای ABC از دومیله باریک با مقطع و جنس یکسان تشکیل شده است. با فرض اینکه فرو ریختن خرپا در اثر کمانش اعضای آن صورت گیرد، تحت چه زاویه θ میتوان بیشترین بار p را بر خرپا وارد نمود؟ (با فرض آنکه $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ **باشد.)**

(سراسری 82)



جواب: با توجه به عمود بودن دو راستای AB و BC میتوان بار P را به مولفه در راستای آنها تجزیه نماییم. بر این اساس داریم:

$$P_{AB} = P.\cos\theta, P_{BC} = P.\sin\theta$$

حال مقدار بار کمانش هر یک از این دو میله را محاسبه میکنیم. برای محاسبه آن لازم است که طول هر یک از دو میله را بدانیم. اگر طول AC را برابر L فرض کنیم، میتوانیم طول دو میله را بر حسب L به شرح زیر به دست آوریم:

$$L_{AB} = L.\cos 60 = \frac{L}{2}$$
$$L_{BC} = L.\sin 60 = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

ضریب طول دو ستون نیز برابر یک فرض میشود.

$$k_{AB} = k_{BC} = 1$$

بار محوری فشاری هر یک از دو میله باید کمتر از مقدار بار بحرانی کمانش باشد:

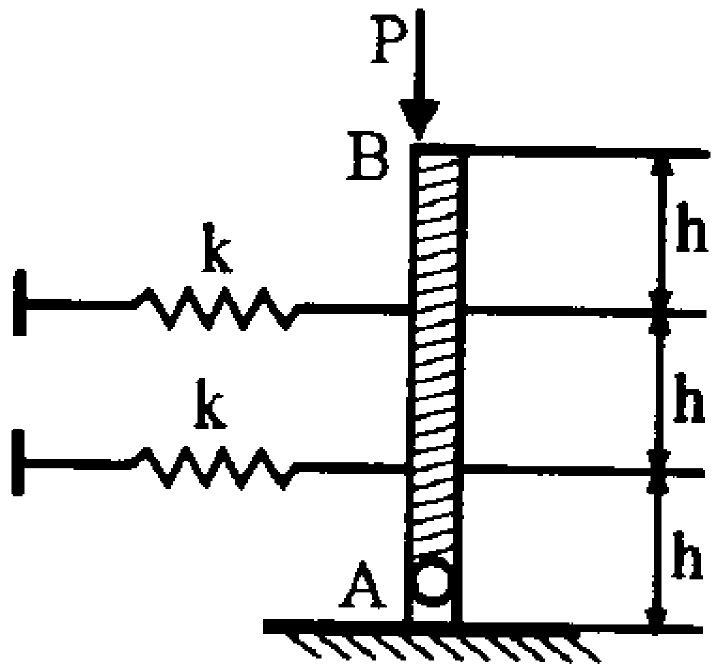
$$P_{AB} = P.\cos\theta \le \frac{\pi^2 EI}{(\frac{L}{2})^2} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$
$$\Rightarrow P \le \frac{4\pi^2 EI}{L^2 \cos\theta}$$
$$P_{BC} = P.\sin\theta \le \frac{\pi^2 EI}{(\frac{L\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{4\pi^2 EI}{3L^2}$$
$$\Rightarrow P \le \frac{4\pi^2 EI}{3L^2 \sin\theta}$$

از بین دو مقداری که برای P از بالا به دست آمده است، باید مقدار مینیمم را در نظر گرفت. با اضافه شدن مقدار θ مقدار محاسبه شده از رابطه اول بزرگتر و مقدار محاسبه شده از رابطه دوم کوچکتر میشود. حالت بهینه برای نیروی P که منجر به ماکسیمم شدن

آن میشود، وقتی است که مقدار محاسبه شده از دو رابطه فوق با هم برابر شوند. به این ترتیب خواهیم داشت:

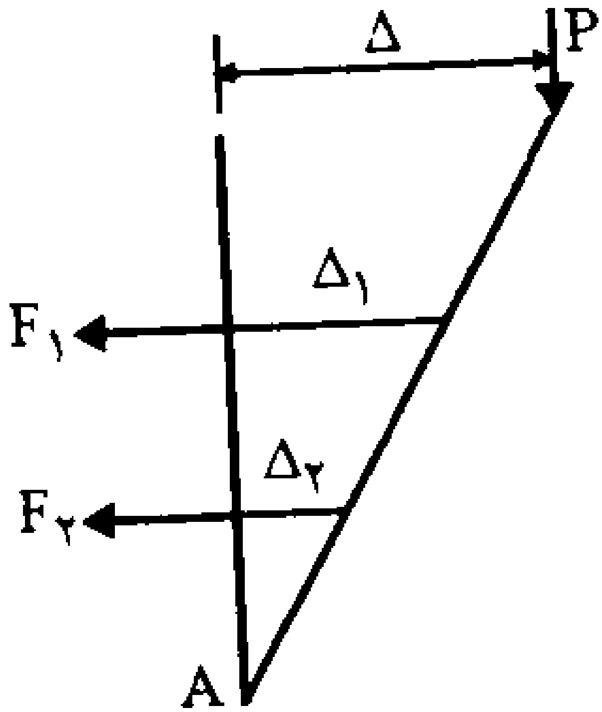
$$\frac{4\pi^2 EI}{L^2 \cos\theta} = \frac{4\pi^2 EI}{3L^2 \sin\theta} \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \theta = 18.43^\circ$$

مثال : مطلوبست محاسبه و تعیین بار بحرانی سازه در شکل مقابل. میله AB یک میله صلب است. (سراسری 79)



جواب: در مسایل شامل میله های صلب و فنر برای محاسبه مقدار بار بحرانی کمانش، ابتدا یک حالت تغییر شکل یافته برای میله در نظر گرفته و با محاسبه نیرو در فنرها و نوشتن معادله تعادل نیروها، مقدار بار P را به دست می آوریم. حال اگر بار P از حد محاسبه شده بیشتر شود، دیگر رابطه تعادل برقرار نخواهد بود و میله از حالت تعادل خارج میشود. بر این اساس مقدار محاسبه شده، مقدار بار بحرانی میله خواهد بود.

مطابق شکل زیر فرض میکنیم که میله دچار تغییر شکل شده است. چون میله صلب است، پس از تغییر شکل دچار انحنا در خود نمیشود و مستقیم باقی میماند.



بر اساس تشابه داریم:

$$\Delta_1 = \frac{2}{3}\Delta$$
$$\Delta_2 = \frac{1}{3}\Delta$$

و به همین ترتیب مقادیر نیروها در دو فنر را محاسبه میکنیم:

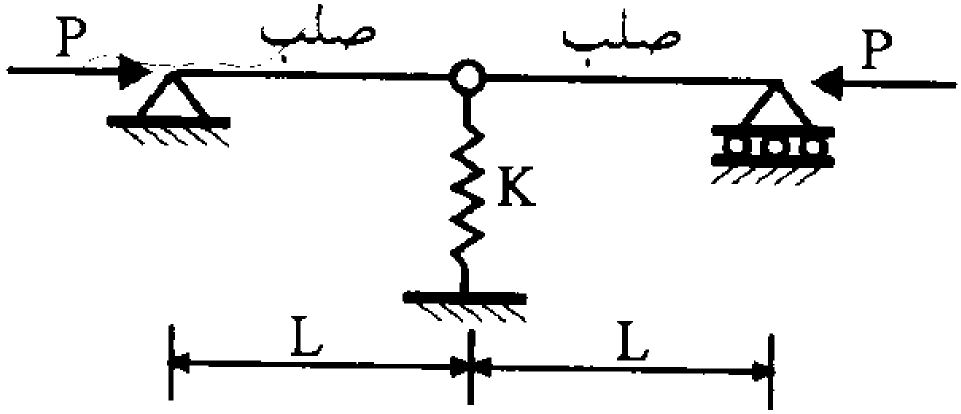
$$F_1 = k.\Delta_1 = \frac{2}{3}k\Delta$$
$$F_2 = k.\Delta_2 = \frac{1}{3}k\Delta$$

حال معادله تعادل لنگر حول نقطه A را مینویسیم:

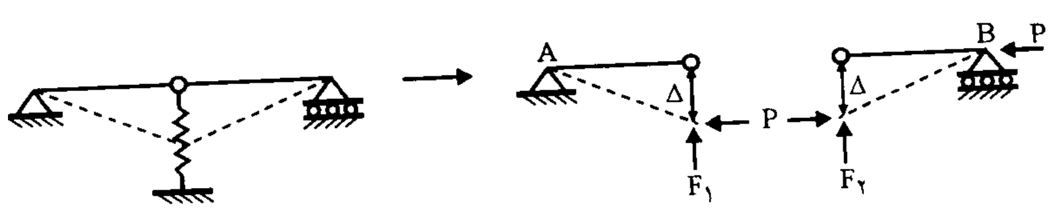
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}k\Delta.2h + \frac{1}{3}k\Delta.h - P\Delta = 0$$
$$\frac{5}{3}k\Delta h - P\Delta = 0 \Rightarrow P = \frac{5}{3}k.h$$

پس بار بحرانی کمانش میله برابر مقدار محاسبه شده در بالا میباشد. در صورتی که بار P از حد بالا بیشتر باشد، دیگر رابطه تعادل برقرار نخواهد بود.

مثال: نیروی کمانش P در شکل زیر چقدر است؟ (سراسری 76)



جواب: این مساله نیز همانند مساله قبلی میباشد. در این حالت نیز فرض میشود که یک تغییر شکل در فنر ایجاد میگردد و بر این اساس نیرو در فنر را محاسبه میکنیم. باز هم با نوشتن معادلات تعادل مقدار بار بحرانی را محاسبه میکنیم. در اینجا مجموعه را از محل مفصل میانی به دو قسمت تقسیم میکنیم. و دیاگرام آزاد هر کدام از این دو تکه را رسم میکنیم. این مساله در شکل زیر نمایش داده شده است.



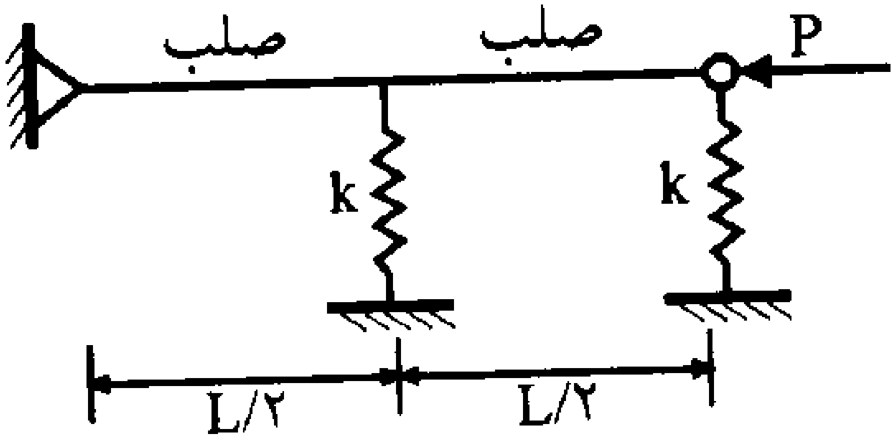
برای هر یک از دو تکه معادله تعادل لنگر را مینویسیم. برای تکه سمت چپ این معادله را حول نقطه A و برای تکه سمت راست این معادله تعادل را حول نقطه B مینویسیم.

$$\sum M_A = ۰ \Rightarrow F_۱ L = P\Delta \quad (۱) \qquad \sum M_B = ۰ \Rightarrow F_۲ L = P\Delta \quad (۲)$$

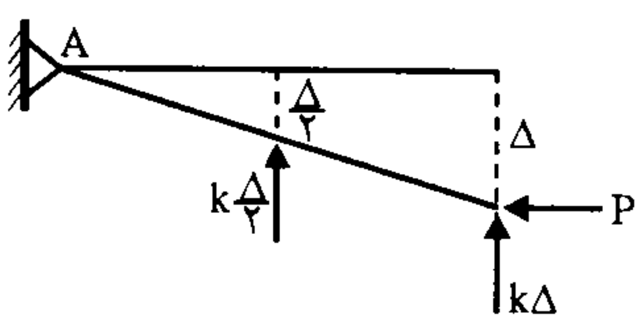
$$\left.\begin{array}{r} (۱)+(۲) \Rightarrow (F_۱ + F_۲)L = ۲P\Delta \\ F_۱ + F_۲ = k\Delta \end{array}\right\} \Rightarrow k\Delta L = ۲P\Delta \Rightarrow P_{cr} = \frac{kL}{۲}$$

در بالا نیروی فنر به دو بخش F_1 و F_2 تقسیم شده است که یکی به سمت چپ و دیگری به تکه سمت راست وارد میشود. مجموع این دو نیرو برابر همان نیروی فنر است.

مثال: بار بحرانی شکل زیر چقدر است؟ (سراسری 75)



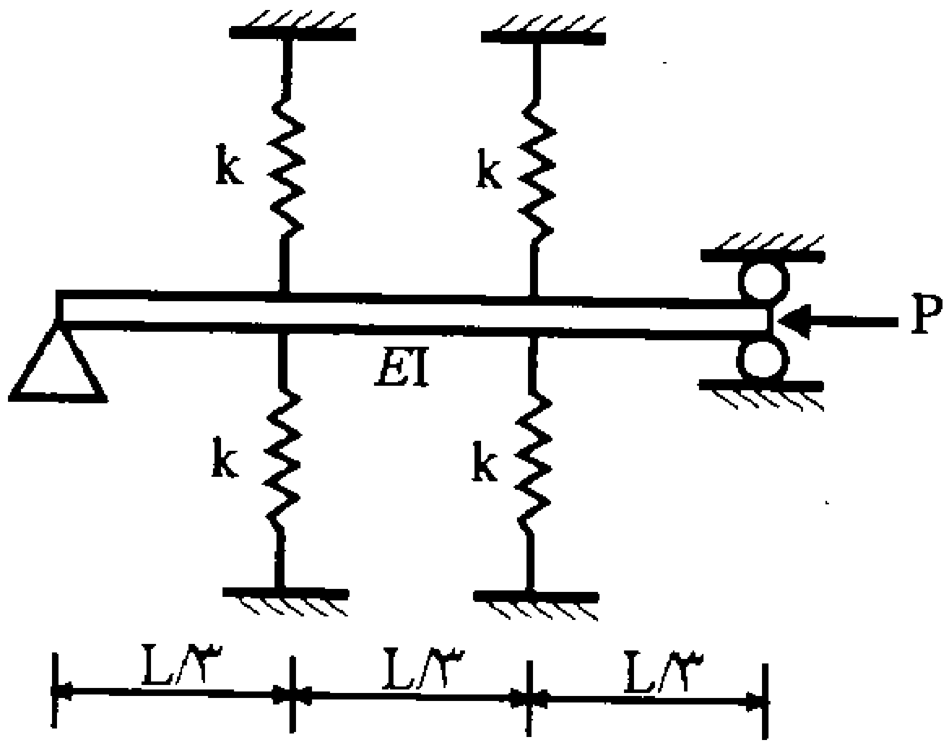
جواب: برای این مساله نیز به شکل دو مساله قبل عمل میکنیم:



$$\sum M_A = ۰ \Rightarrow P\Delta = k\Delta L + k\frac{\Delta}{۲}\frac{L}{۲} = \frac{۵kL}{۴}\Delta$$

$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{۵kL}{۴}$$

مثال : در تیر شکل زیر بار بحرانی چقدر است؟ (آزاد 82)

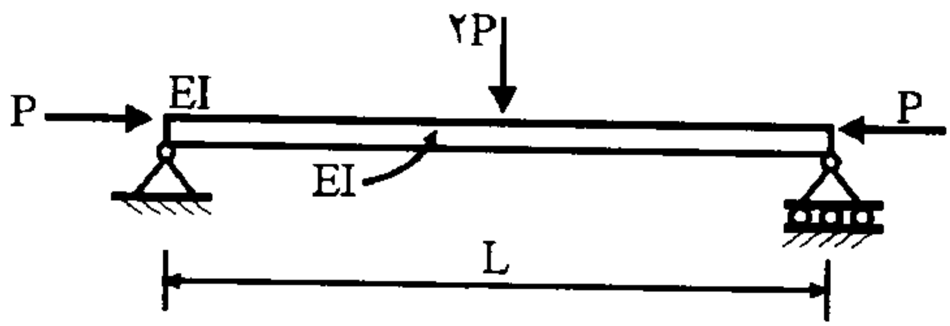


جواب: فنرها به صورت تکیه گاه تیر عمل میکنند. میتوان تیر را به صورت شکل زیر تقریب زد:

بر این اساس میتوان فرض کرد که تیرها به صورت تیر دو سرمفصل عمل میکنند و ضریب طول آنها برابر یک میباشد. به این ترتیب بار بحرانی کمانش تیر برابر خواهد بود با:

$$P_{cr} = \frac{\pi^{۲}EI}{\left(\frac{L}{۳}\right)^{۲}} = \frac{۹\pi^{۲}EI}{L^{۲}}$$

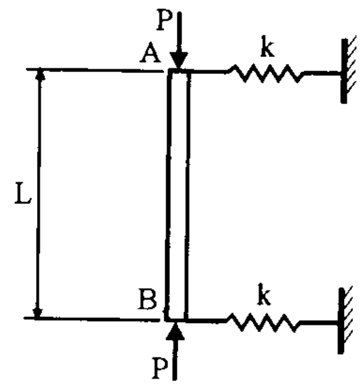
مثال: مقدار بار بحرانی کمانشی تیر زیر را محاسبه نمایید. (آزاد 82)



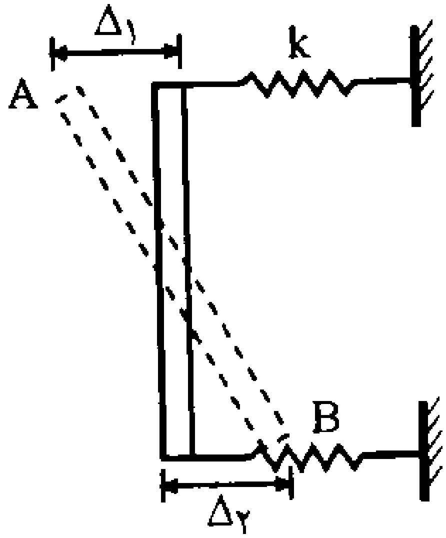
جواب: در تیر شکل بالا بار 2P نقشی درکمانش تیر ندارد و تنها باعث ایجاد خمش در تیر میشود. در محاسبه بار کمانش تیر تنها بار P که به صورت فشاری است، موثر است. با توجه به شرایط تکیه گاهی تیر که به صورت دوسرمفصل است، ضریب طول تیر نیز برابر یک خواهد بود. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E.I}{(K.L)^2} = \frac{\pi^2 E.I}{L^2}$$

مثال: بار بحرانی سیستم مقابل چقدر است؟ میله AB یک میله صلب است. (آزاد 81)



جواب: فرض میکنیم که سیستم بالا به شکل دلخواه زیر تغییر شکل بدهد: (چون باید سیستم پس از تغییر شکل دارای تعادل در راستای افقی باشد، باید یکی از دو فنر فشرده شده و دیگری افزایش طول دهد، تا دو نیروی افقی مساوی و خلاف جهت ایجاد شود که همدیگر را خنثی نمایند).

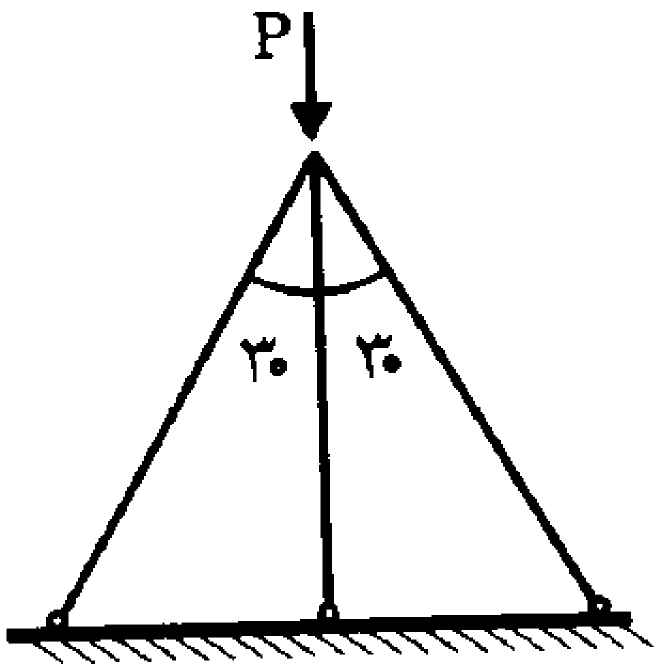


ضمن محاسبه نیرو در دو فنر، معادله تعادل لنگر حول نقطه B و معادله تعادل نیرو در راستای افقی (محور X) را مینویسیم.

$$\left.\begin{aligned} &\sum M_B = ۰ \Rightarrow P(\Delta_۱ + \Delta_۲) = k\Delta_۱ L \\ &\sum F_x = ۰ \Rightarrow k\Delta_۱ = k\Delta_۲ \Rightarrow \Delta_۱ = \Delta_۲ \end{aligned}\right\} \Rightarrow ۲P\,\Delta_۱ = k\Delta_۱ L$$

$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{kL}{۲}$$

مثال: در شکل زیر هر سه میله دارای سطح مقطع یکسان میباشند و بار اویلر میله وسط P_E است. بار بحرانی کل سازه چقد ر است؟ (سراسری 73)



جواب: اگر فرض کنیم که طول میله میانی برابر L باشد، طول دو میله مایل کناری برابر $L' = \frac{L}{\cos 30} = \frac{L}{\sqrt{3}/2} = \frac{2\sqrt{3}L}{3}$ خواهد شد.

بر این اساس مقدار بار بحرانی دو میله کناری هم به شکل زیر محاسبه خواهد شد:

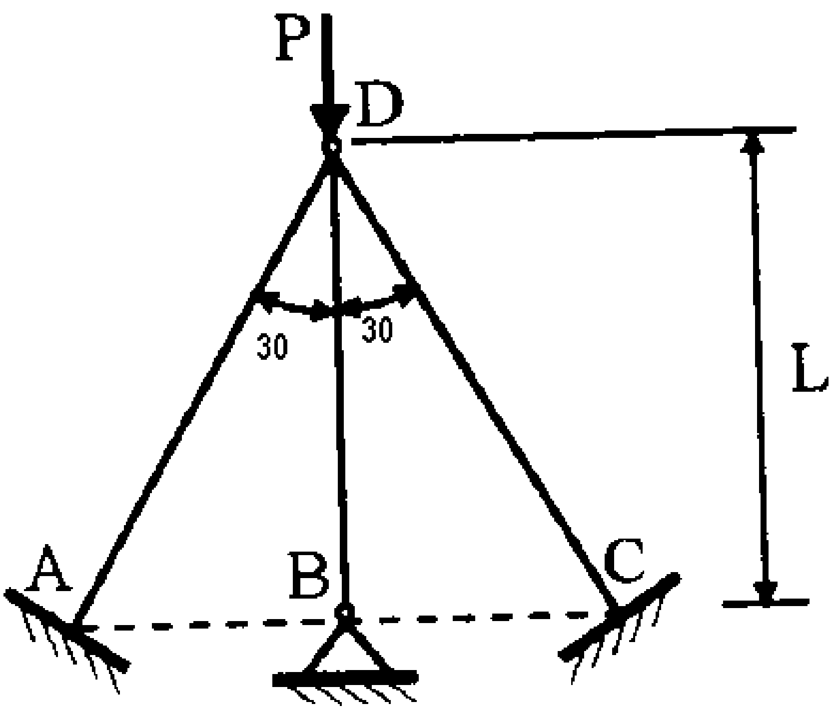
$$P_E = \frac{\pi^2 E.I}{L^2}$$

$$P_E' = \frac{\pi^2 E.I}{L'^2} = \frac{\pi^2 E.I}{(\frac{2\sqrt{3}L}{3})^2} = \frac{3\pi^2 E.I}{4L^2} = 0.75 P_E$$

حال برای به دست آوردن مقدار بار بحرانی P کافیست که معادله تعادل نیروها در راستای عمودی را بنویسیم:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_E + 2 \times 0.75 P_E \times \cos 30 - P = 0$$
$$\Rightarrow P = 2.3 P_E$$

مثال: در مثال قبل فرض کنید که دو میله مایل دارای اتصالات گیردار به زمینند و مقدار بار P را دوباره محاسبه نمایید. (آزاد 82)



جواب: در اینجا تنها ضریب طول میله های کناری نسبت به حالت قبل فرق خواهد کرد و برابر 0.7 میباشد. خواهیم داشت:

$$P_E' = \frac{\pi^2 E.I}{L'^2} = \frac{\pi^2 E.I}{(0.7 \times \frac{2\sqrt{3}L}{3})^2} = 1.53 \frac{\pi^2 E.I}{L^2} = 1.53 P_E$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_E + 2 \times 1.53 P_E \times \cos 30 - P = 0$$

$$\Rightarrow P = 3.65 P_E = 3.65 \frac{\pi^2 E.I}{L^2}$$