بسم الله الرحمن الرحيم

ریاضی عمومی ۲

تهیه و گردآوری:محمدامین آل آقا

رویه ها

۱ـاستوانه

تهیه و گردآوری:محمدامین آل آقا

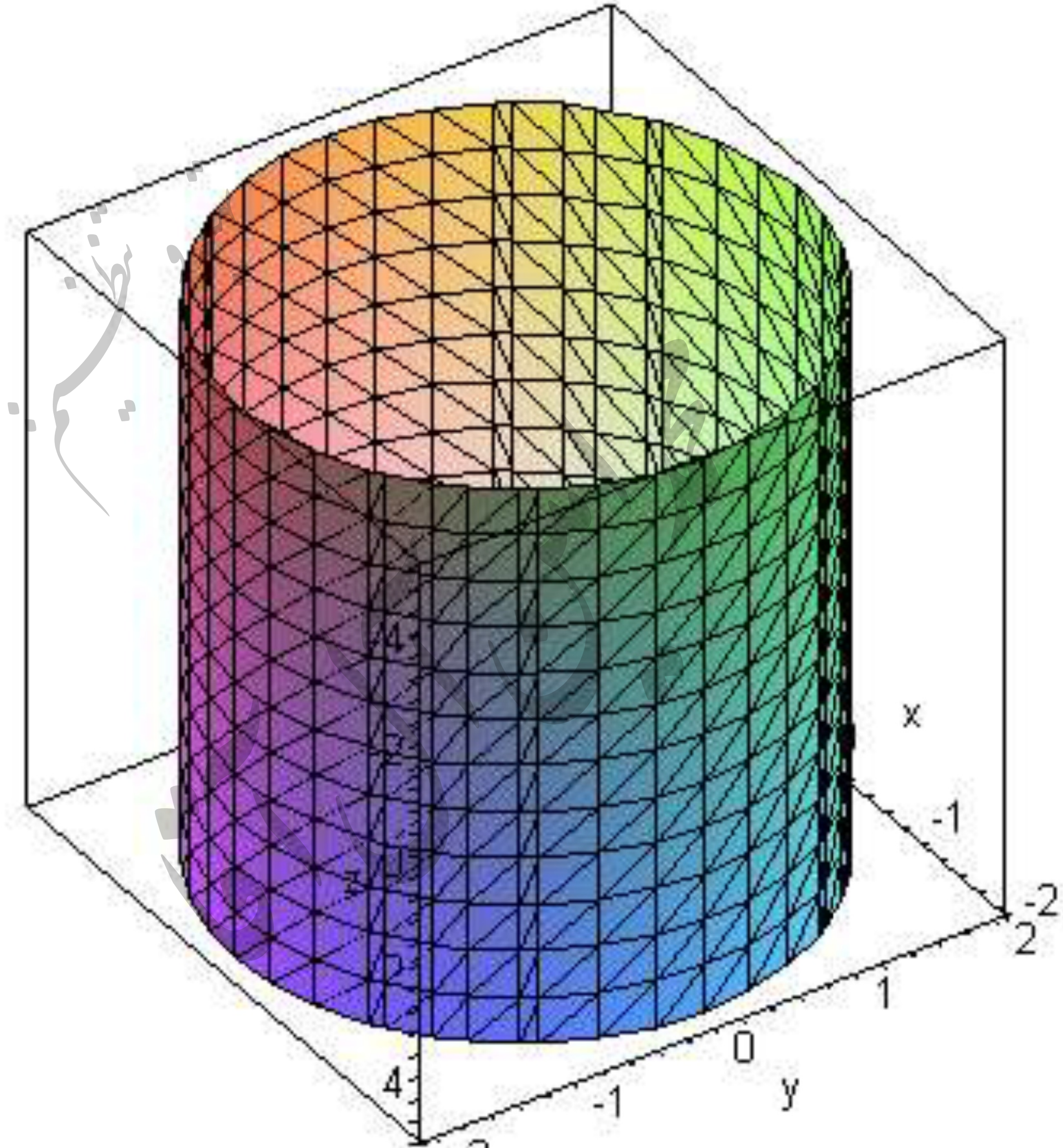
تعريف: هر گاه c يك منحني(منحني هادي استوانه) در يك صفحه و L خطي ناواقع بر اين صفحه باشد، خطي كه متكي بر c و موازي با Lحركت كند(مولد استوانه) رويه اي توليد ميكند كه استوانه يا رويه استوانه اي نام دارد

- مثال:

$$c: x^2 + y^2 = 1$$

$$L: Z = 0$$

- استوانه $x^2 + y^2 = 1$



تهیه و گردآوری:محمدامین آل آقا

راه حل كلي حل مسايل:فرض $c\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$

- هادي و D يك مولد استوانه باشد:

$$c\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=\lambda \\ a_2x+b_2y+c_2z=\mu \end{cases}$$

- D را به شكل فصل
- مشترك دو صفحه در نظر ميگيريم و دستگاه معادلات حاصل را با حذف x,y,z, حل ميكنيم و سپس بجاي λ,μ مقدار ميگذاريم. معادله استوانه بدست ميآيد.

مثال:معادله استوانه اي را بنويسيد كه خم هادي و امتداد مولد آن داده شده است:

$$c\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=\dfrac{a}{2} \end{cases},D:\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{3}$$

حل:فرض كنيد:

$$\frac{x}{2}-y=t,\frac{x}{2}-\frac{z}{3}=r$$

داريم:

ادامه حل:

$$c\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=\dfrac{a}{2} \Rightarrow z=\dfrac{a}{2}-x-y \\ \dfrac{x}{2}-y=t \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{z}{3}=r \Rightarrow \dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{3}(\dfrac{a}{2}-x-y)=r \end{cases}$$

$$x=\frac{t}{3}+r+\frac{a}{6},\ y=(-\frac{5}{6})t+\frac{r}{2}+\frac{a}{12},\ z=\frac{t}{2}-(\frac{3}{2})r+\frac{a}{4}$$

ادامه حل: x,y,z را در معادله کره قرار میدهیم:

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{25}{36}+\frac{1}{9}\right)t^2+\left(\frac{9}{4}+\frac{1}{4}+1\right)r^2+\left(-\frac{3}{2}-\frac{5}{6}-\frac{2}{3}\right)tr+$$

$$+\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{36}+\frac{1}{9}\right)ta+\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{3}\right)ra+$$

$$+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{144}+\frac{1}{36}\right)a^2=a^2$$

پس از ساده کردن و جايگذاري t,r بر حسب x,y,z داريم:

ادامه حل:

$$76\left(\frac{x}{2}-y\right)^2+252\left(\frac{x}{2}-\frac{z}{3}\right)^2-120\left(\frac{x}{2}-\frac{z}{3}\right)\left(\frac{z}{2}-y\right)+$$

$$+16\left(\frac{x}{2}-y\right)a-30\left(\frac{x}{2}-\frac{z}{3}\right)a=65a^2$$

پس از ساده کردن نتيجه نهايي چنين ميشود:

$$22x^2+76y^2+28z^2-64xz-40zy-$$

$$-16ay-7ax+10a-16xy=65a^2$$

۲ - رویه دوار

تعريف: منحني c وخط L را كه هر دو روي يك صفحه واقع هستند را در نظر ميگيريم:اگر c (مولد رويه) حول L (محور دوران) دوران كند. رويه اي ايجاد ميشود كه رويه دوار نام دارد.

روش حل: در صورتي كه منحني در يكي از صفحات مختصات و محور دوران يكي از محور هاي مختصات باشد كافي است در معادله منحني فقط بجاي نام متغيري كه محور دوران نيست جذر مجموع مربعات دو محور غير دوران را جايگذاري كنيم.

معادله رويه دوار   محور دوران معادله منحني

$F(x,y)=0$ $Z=0$	محور x محور y	$F(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$ $F(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$
$F(y,z)=0$ $X=0$	محور y محور z	$F(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$ $F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$
$F(z,x)=0$ $y=0$	محور z محور x	$F(z,\pm\sqrt{x^2+y^2})=0$ $F(\pm\sqrt{y^2+z^2},x)=0$

مثال: رویه حاصل از دوران خم xy=1 حول محور x را پیدا کنید.

حل:

$$x\sqrt{y^2+z^2}=1$$

۳- ساير رويه هاي درجه دوم

اصول كلي رسم نمودار رويه ها:

- ۱ـ محل برخورد با محور هاي مختصات را بدست آوريد.مثلا:با قرار دادن $y=z=0$
- ۲ـ محل برخورد با صفحات مختصات را بدست آوريد.مثلا:با قرار دادن $z=0$
- ۳ـ محل برخورد با صفحات موازي صفحات مختصات را بدست آوريد.مثلا:با قرار دادن $z=k$

صورت كلي رويه هاي درجه دوم:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz +$$

$$+ Fzx + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

حالت خاص:اگر ضرايب جملات

حاصلضرب صفر شود

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy +$$

$$+ Iz + J = 0$$

روش حل مسایل حالت خاص:

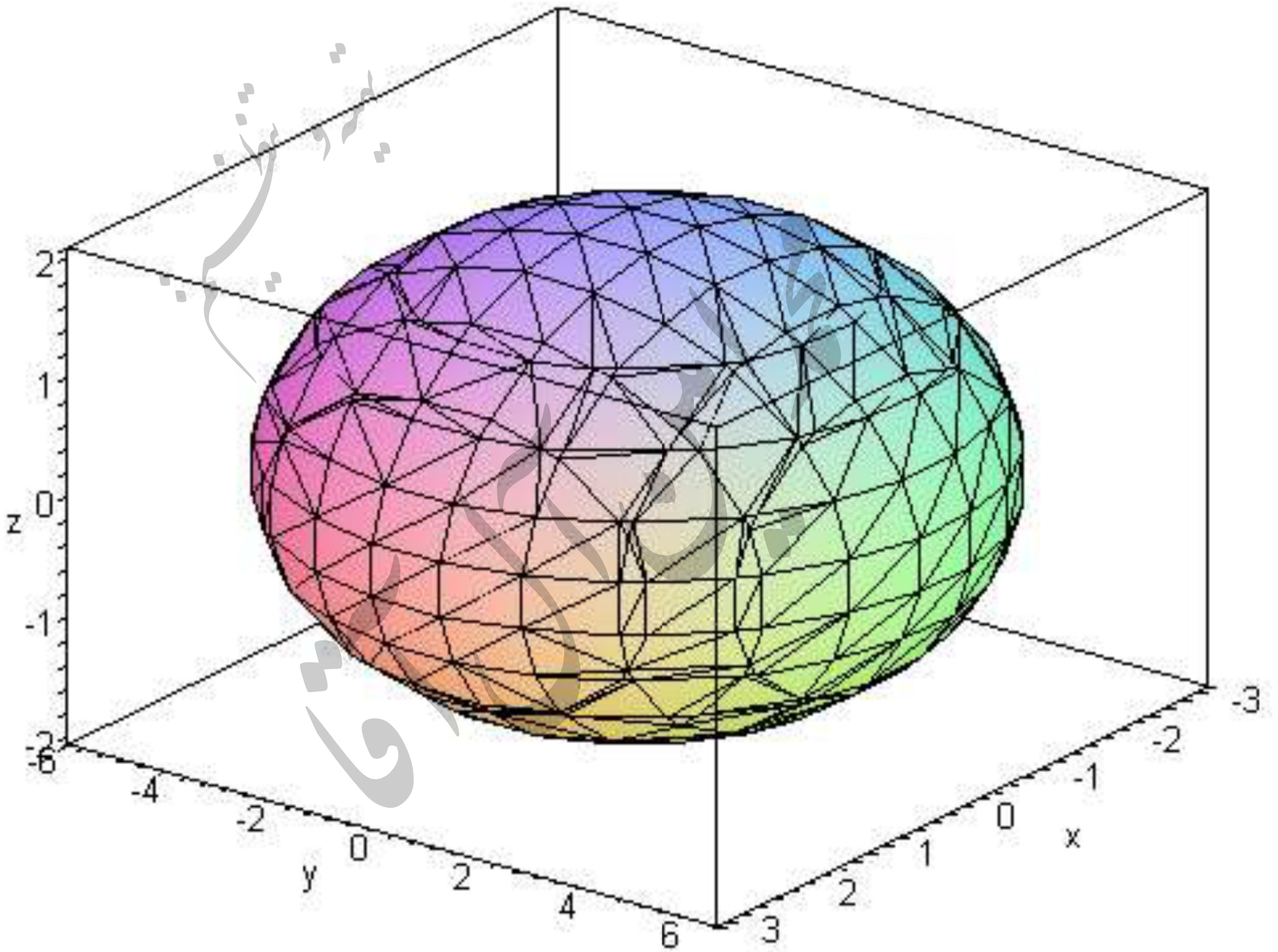
- عبارتهاي درجه دوم در معادله را به مربع كامل تبديل كرده ومعادله را به يكي از صورتهاي استانده(استاندارد) در ميآوريم.
- معادلات استانده در ادامه توضيح داده خواهدشد.

۳-۱-بيضوي:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

روش شناخت:

سه جمله مربع هم علامت سمت چپ و عدد يك سمت راست تساوي

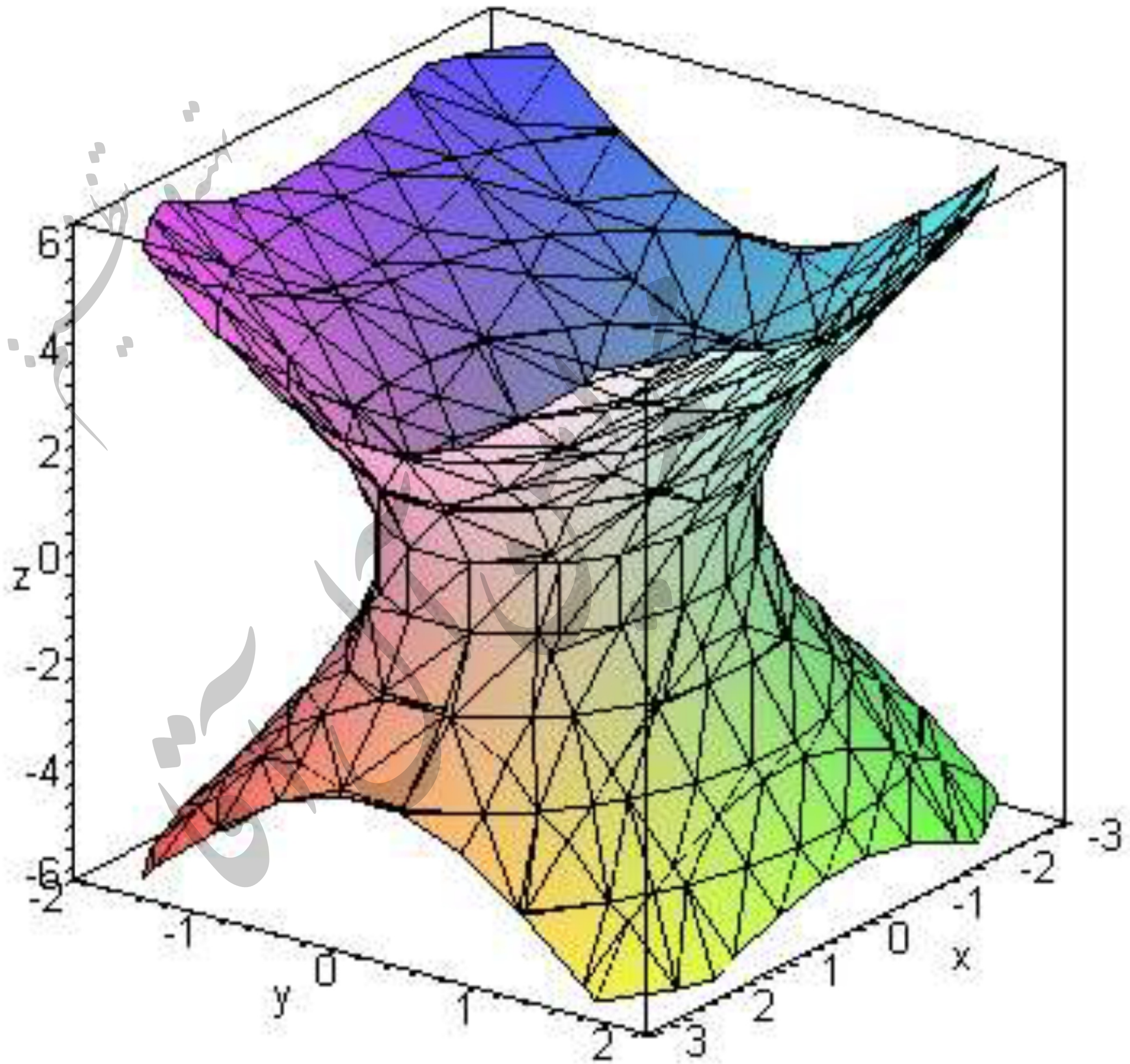

z
2
1
0
-1
-2
y
-6
-4
-2
0
2
4
6
x
-3
-2
-1
0
1
2
3

٣-٢- هذلوليوار يك پارچه:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

روش شناخت:

سه جمله مربع كه فقط يك جمله منفي (كه نشان دهنده محور شكل است) سمت چپ وعدد يك سمت راست تساوي.



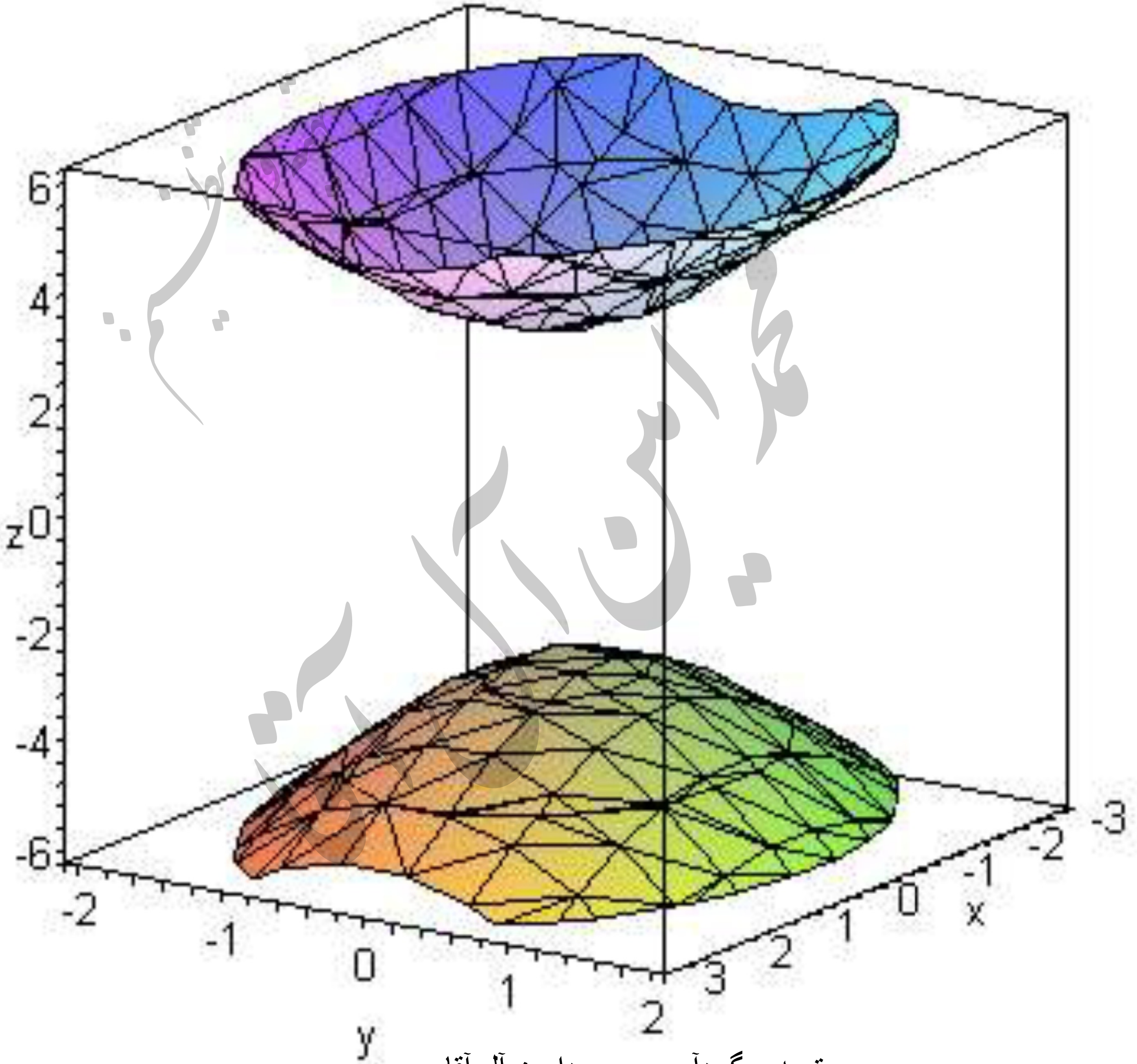
تهیه و گردآوری:محمدامین آل آقا

۳-۳- هذلوليوار دو پارچه:

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

روش شناخت:

سه جمله مربع كه دو جمله منفي سمت چپ (جمله مثبت نشان دهنده محور است) وعدد يك سمت راست تساوي

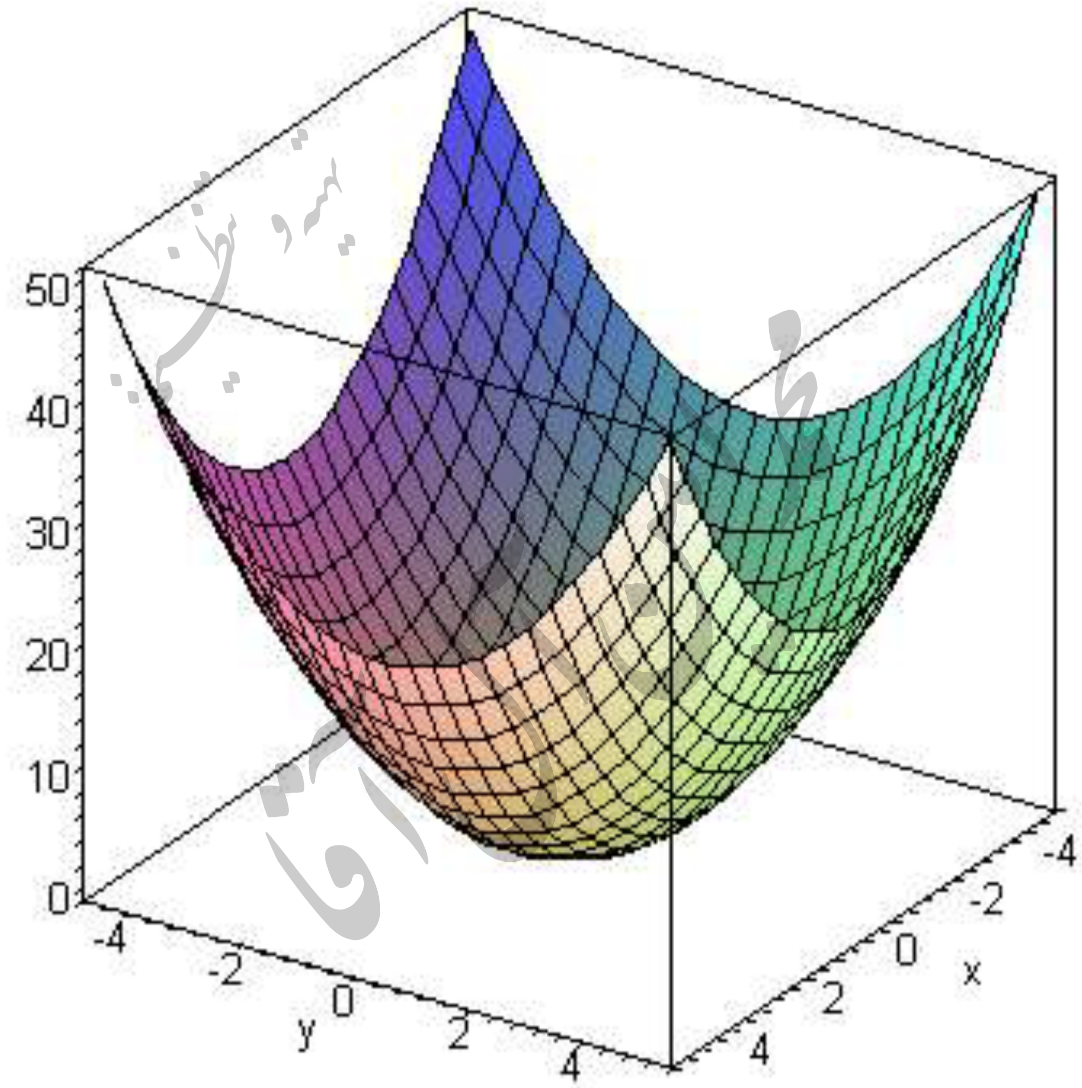

6
4
2
z0
-2
-4
-6
-2
-1
0
1
2
y
-3
-2
-1
0
x
1
2
3

۳-۴- سهمیوار:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

روش شناخت:

دو جمله مربع در يك سمت ويك جمله درجه يك در سمت ديگر تساوي .همه جملات هم علامت (جمله درجه يك نشان دهنده محور است)



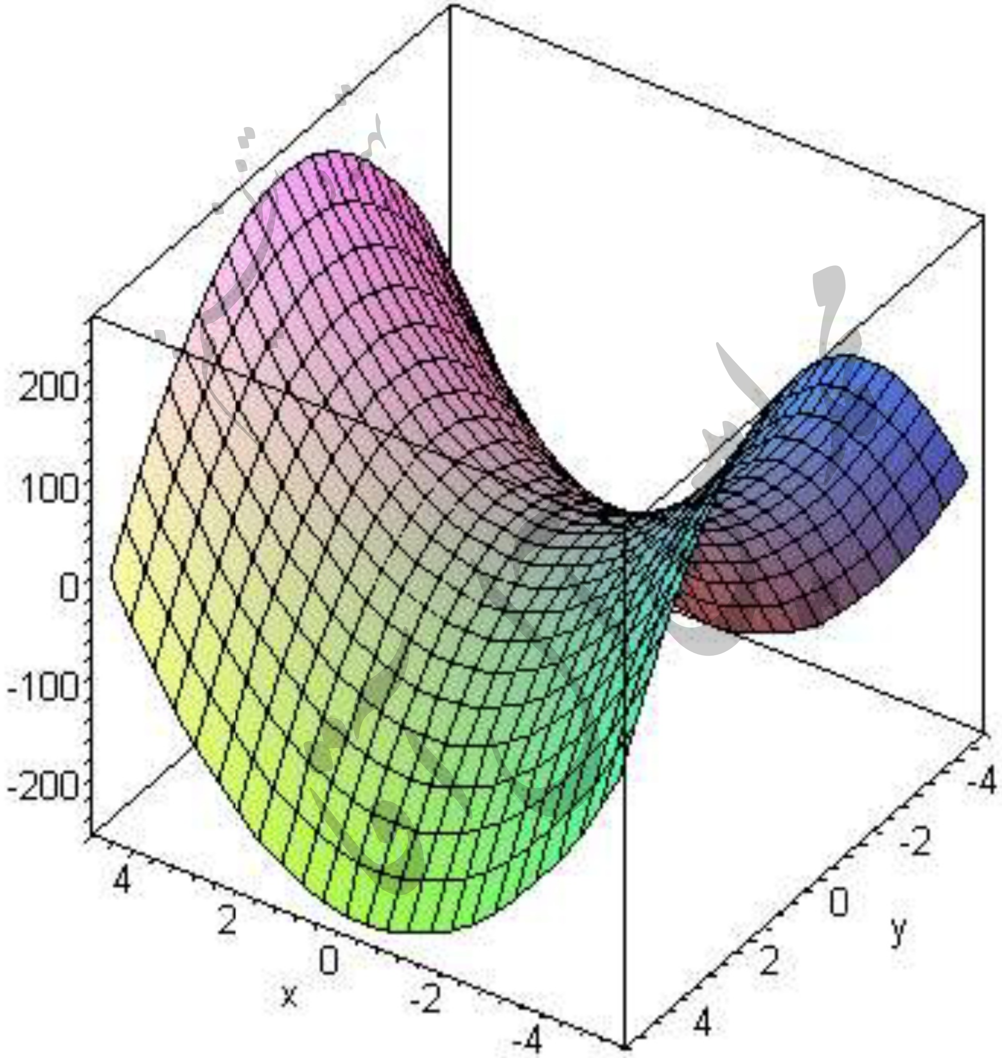
تهیه و گردآوری:محمدامین آل آقا

۳-۴- سهميوار هذلولوي(زين اسبي):

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

روش شناخت:

دو جمله مربع مختلف العلامه در يك سمت ويك جمله درجه يك در سمت ديگر تساوي (جمله درجه يك نشان دهنده محور است)

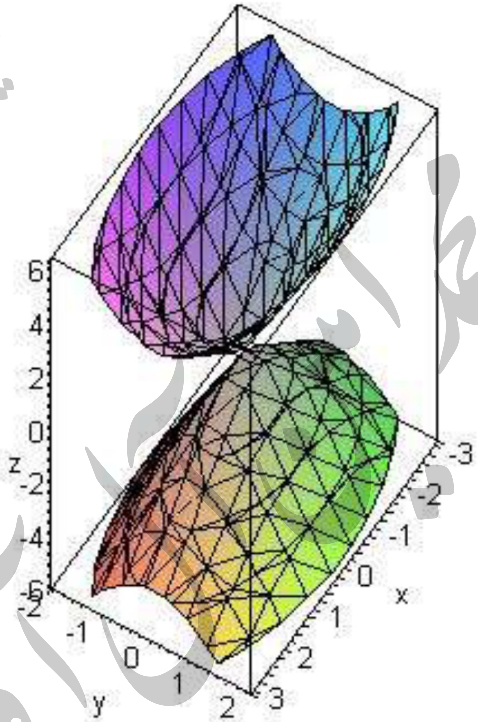

200
100
0
-100
-200
4
2
0
x
-2
-4
-4
-2
0
y
2
4

۳-۴- مخروط:

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

روش شناخت:

دو جمله مربع در يك سمت ويك جمله مربع در سمت ديگر تساوي (جمله تكي نشان دهنده محور است)


6
4
2
0
z
-2
-4
-6
-2
-1
0
1
2
y
-3
-2
-1
0
x
1
2
3

مثال:رويه زير را شناسايي كنيد:

$$6x^2+2y^2-3z^2+y=0$$

حل:

$$6x^2+2(y+\frac{1}{4})^2-\frac{1}{8}-3z^2=0\rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x^2+2(y+\frac{1}{4})^2-3z^2=\frac{1}{8}$$

هذلوليوار يك پارچه

روش حل مسايل رويه ها در حالت كلي:

۱-ماتريس صورت درجه دوم را مينويسيم.

۲-مقادير ويژه را بدست مياوريم(ضرايب جملات درجه دوم جديد)

۳-بردارهاي ويژه را بدست مياوريم.

۴-ماتريس تبديل مختصات را مينويسيم(با قرار دادن بردارهاي ويژه يكه در ستونها).

۵-معادلات تبديل مختصات را بدست مياوريم و در عبارت درجه يك قرار ميدهيم.

۶- نتيجه بند۲و۵ را در يك عبارت ساده ميكنيم.

مثال:رويه درجه دوم زير را شناسايي كنيد:

$$3x^2+4y^2+5z^2+\underbrace{4}_{2+2}xy-\underbrace{4}_{-2-2}yz+2x+3y+4z=20$$

حل:

$$\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & 4 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}3-\lambda & 2 & 0\\ 2 & 4-\lambda & -2\\ 0 & -2 & 5-\lambda\end{vmatrix}=o$$

$$(3-\lambda)(4-\lambda)(5-\lambda)+0+0-[0+4(3-\lambda)+4(5-\lambda)=0$$

$$(3-\lambda)(\lambda^2-9\lambda+20)+8\lambda-32=0\Rightarrow$$

$$-\lambda^3+9\lambda^2-20\lambda+3\lambda^2-27\lambda+60+8\lambda-32=0\Rightarrow$$

ادامه حل:

$$-\lambda^3+12\lambda^2-39\lambda+28=0\Rightarrow$$

$$(\lambda-1)(-\lambda^2+11\lambda-28)=0\Rightarrow-(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-7)=0$$

$$\boxed{\lambda_1=1}, \lambda_2=4, \lambda_3=7$$

$$\begin{bmatrix}2&2&0\\2&3&-2\\0&-2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}2x+2y=0\\2x+3y-2z=0\\-2y+4z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}x=-y\\z=\frac{1}{2}y\end{matrix}$$

$$v_1=y\begin{bmatrix}-1\\1\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}\Rightarrow\boxed{u_1=\frac{2}{3}\begin{bmatrix}-1\\1\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}}$$

ادامه حل:

$$\lambda_2 = 4,$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x+2y=0 \\ 2x-2z \quad =0 \\ -2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=2y \\ z=2y \end{matrix}$$

$$v_2 = y\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow u_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \lambda_3 = 7 \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -4x+2y=0 \\ 2x-3y-2z \quad =0 \\ -2y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=\frac{1}{2}y \\ z=-y \end{matrix} \Rightarrow v_3 = y\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow u_3 = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ادامه حل: ماتریس تبدیل مختصات:

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

معادلات تبديل مختصات كه بايد در عبارت درجه يك جايگذاري كرد:

$$x = \frac{1}{3}(-2x' + 2y' + z')$$

$$y = \frac{1}{3}(2x' + y' + 2z'), z = \frac{1}{3}(x' + 2y' - 2z')$$

ادامه حل: حال λ_i را بترتیب ضریب x', y', z' و معادلات تبدیل مختصات را در عبارت درجه يك قرار ميدهيم:

$$x'^2 + 4y'^2 + 7z'^2 + \frac{2}{3}(-2x' + 2y' + z') +$$

$$+ (2x' + y' + 2z') + \frac{4}{3}(x' + 2y' - 2z') = 20$$

$$x'^2 + 4y'^2 + 7z'^2 + 2x' + 5y' = 20$$

ادامه حل:

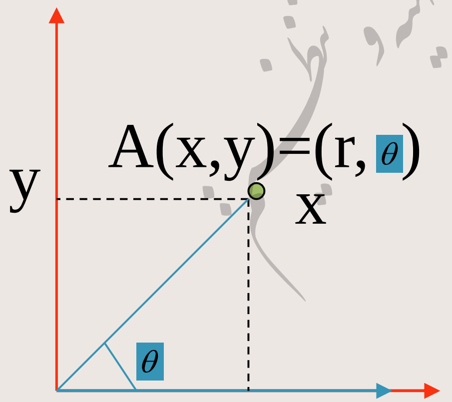
$$(x'+1)^2-1+4(y'+\frac{5}{8})^2-\frac{25}{16}+7z'^2=20$$

$$(x'+1)^2+4(y'+\frac{5}{8})^2+7z'^2=20+1+\frac{25}{16}$$

بيضوي است.

مختصات

مختصات قطبي:

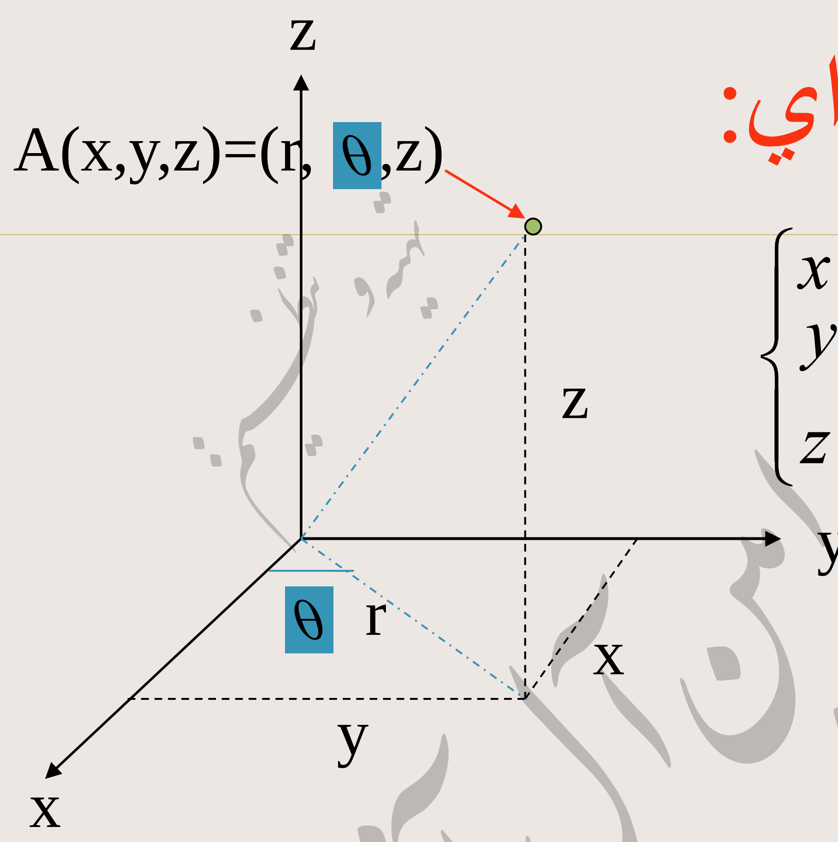


$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = x^2 + y^2 \\ \theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) \end{cases}$$

قرارداد: $-\pi \le \theta \le \pi$ $r \ge 0,$

مختصات استوانه اي:



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = x^2 + y^2 \\ \theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) : \quad x \geq 0 \\ \theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) : \quad x \geq 0 \\ z = z \end{cases}$$

قرارداد:

$$r \geq 0, \qquad -\pi \prec \theta \leq \pi$$

معرفي بعضي شكلها در مختصات استوانه اي:

$R=0$ محور z است.

معادله استوانه در مختصات دكارتي $x^2+y^2=c^2$

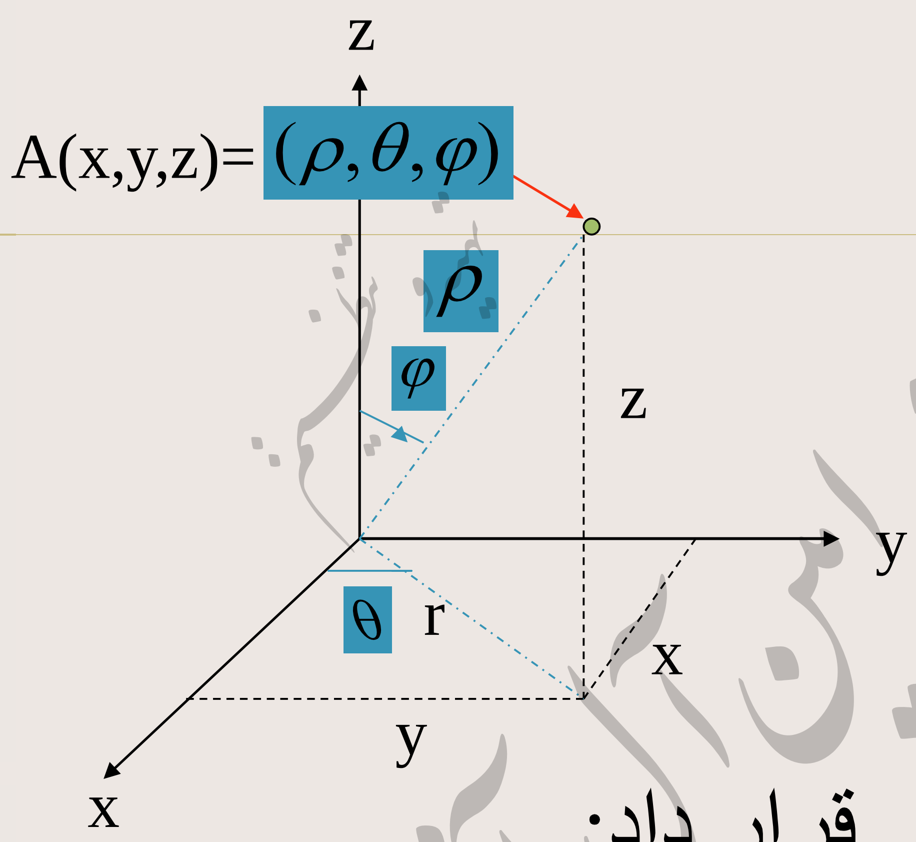
$R=c$ معادله همان استوانه در مختصات استوانه اي

$\theta=\theta_0$ مجموعه نيم صيفحه شامل محور z و نيم خط

$r\geq 0$

$Z=c$ معادله يك صفحه كه محور z بر آن عمود است

مختصات کروي:



$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \begin{cases} \tan^{-1}\dfrac{y}{x}: & x \geq 0 \\ \tan^{-1}\dfrac{y}{x}: & x \leq 0 \end{cases} \\ \varphi = \cos^{-1}\dfrac{z}{\rho} \end{cases}$$

قرار داد:

$$\rho \geq 0, \quad -\pi \prec \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

معرفي بعضي شكلها در مختصات كروي:

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \quad \Rightarrow \quad \rho=r$$

كروي

كره اي به شعاع r در مختصات دكارتي

$\theta=\theta_0$ نمودار نيم صفحه اي شامل محور z

$\varphi=\varphi_0$ نمودار نيم مخروط

توابع برداري

تعریف تابع برداري يك متغيره:

- تابع که در آن و$n=2$ یا $n=3$ را يك تابع برداري يك متغيره، مجموعه A را دامنه و مجموعه را برد این تابع مینامند.
- به ازاي $n=2$ و ،$f(t)$ را میتوانیم به صورت بنویسیم. که در آن توابعي حقيقي روي A هستند. از طرف دیگر $f(t)$ معرف نقطه اي چون است. بنابراین داریم:

ادامه تابع برداري:

$$x = f_1(t), y = f_2(t)$$

- معادلات فوق را معادلات پارامتري نگاره f ، و توابع f_1, f_2 را مؤلفه هاي f و متغير t را يك پارامتر مينامند.
- به همين ترتيب:

$$n = 3, f_i : A \to R \quad \forall i = 1,2,3, f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) : t \in A$$

مؤلفه ها

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t)$$

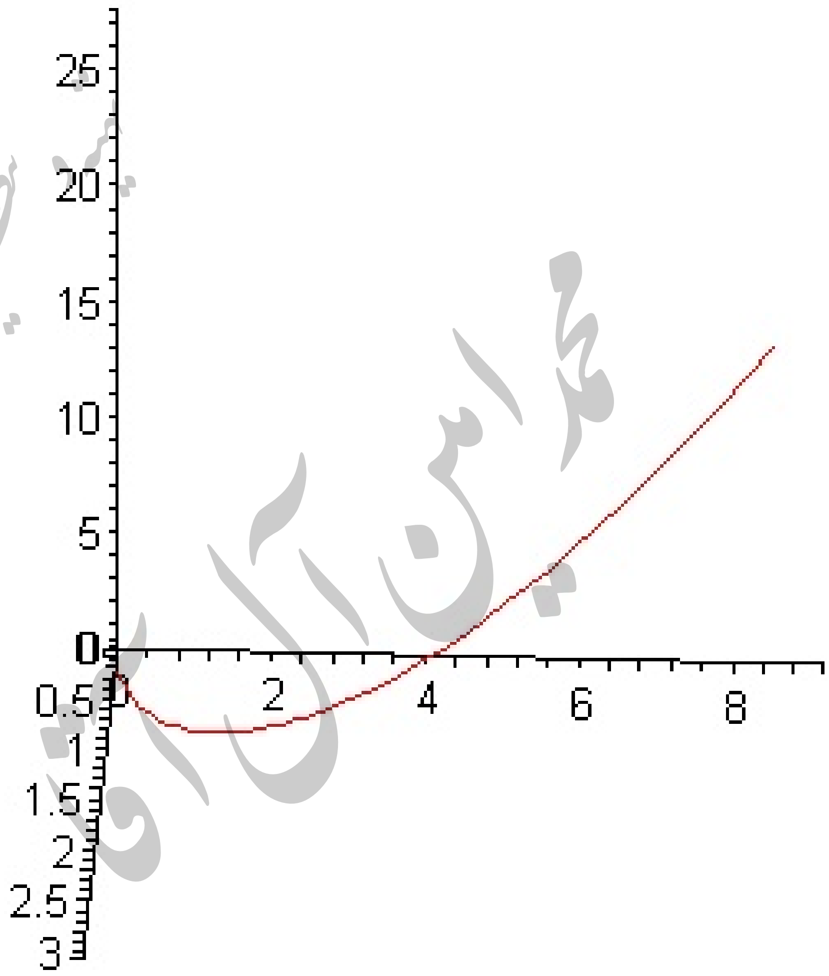
معادلات پارامتري

مثال:معادلات پارامتري نگاره f را بنويسيد.اين نگاره چه شكلي دارد؟

$$f: R \to R^3, f(t) = (t, t^2, t^3)$$

حل:

معادلات پارامتري $x = t, y = t^2, z = t^3$


25
20
15
10
5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
2
4
6
8

تعريف حد:تابع برداري $f: A \subseteq R \to R^2$ با $f(t)=(f_1(t), f_2(t))$)($f: A \subseteq R \to R^3$ با $f(t)=(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ (در نقطه $t=t_0$ داراي حد $L=(l_1,l_2)$, $L=(l_1,l_2,l_3)$ است اگر

$$\lim_{t\to t_0} f_1(t)=l_1 , \lim_{t\to t_0} f_2(t)=l_2 , \lim_{t\to t_0} f_3(t)=l_3$$

- به عبارت ديگر تابعf در نقطه t_0 حد دارد اگر و تنها اكر هر يك از مؤلفه هاي آن در اين نقطه حد داشته باشد

مثال: حد تابع زیر را در t=0 پیدا کنید:

$$f(t)=(\sin t, t^2+1)$$

حل:

$$\lim_{t\to 0}(\sin t, t^2+1)=(0,1)$$

تعريف پيوستگي: تابع $f: A\subseteq R\to R^n$ كه در آن n=2 يا n=3 در نقطه $t=a\in A$ پيوسته است اگر داشته باشيم:

$$\lim_{t\to a} f(t)=f(a)$$

F را روي A پيوسته نامند اگر در هر يك از نقاط A پيوسته باشد. يعني وقتي كه هر يك از مؤلفه هاي آن پيوسته باشد.

مثال: آیا تابع زیر در نقطه داده شده پیوسته است؟ $f(t)=(\frac{\sin t}{t},\frac{1}{1-t},t\ln t),t=0$

حل: چون مؤلفه اول پیوسته نیست بنابراین تابع پیوسته یست.

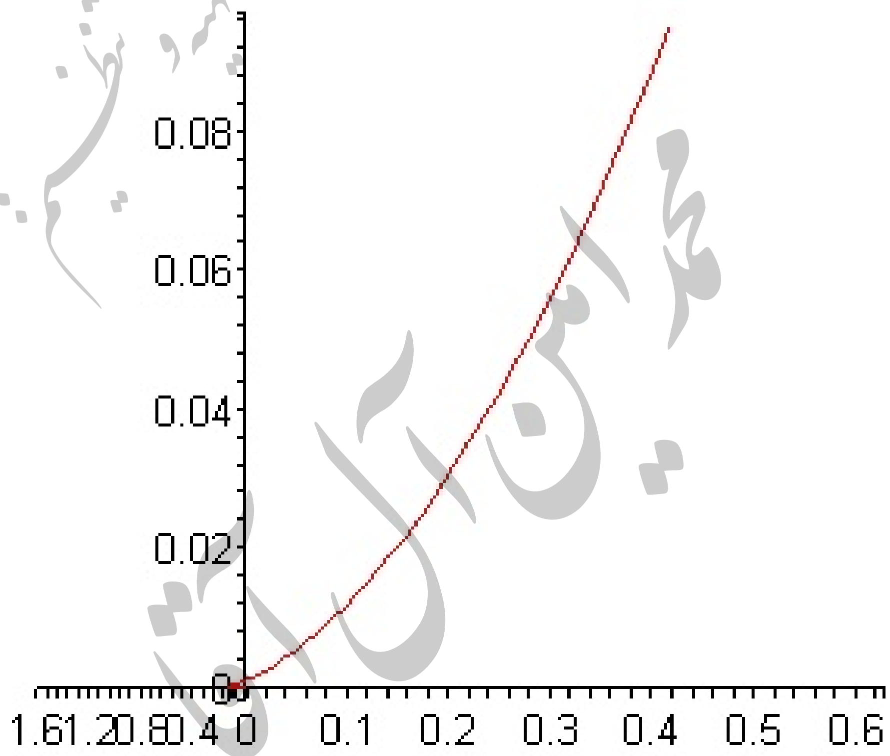
تعریف اثر: اگر $f:[a,b]\to R^n$ با $a \prec b$ و n=2 یا n=3 تابعي پیوسته روي [a,b] باشد، آنگاه f را يك خم در R^2 یا R^3 مینامند. نگاره f یعني مجموعه

$$f[a,b]=\{f(t)\ |f\in[a,b]\}$$

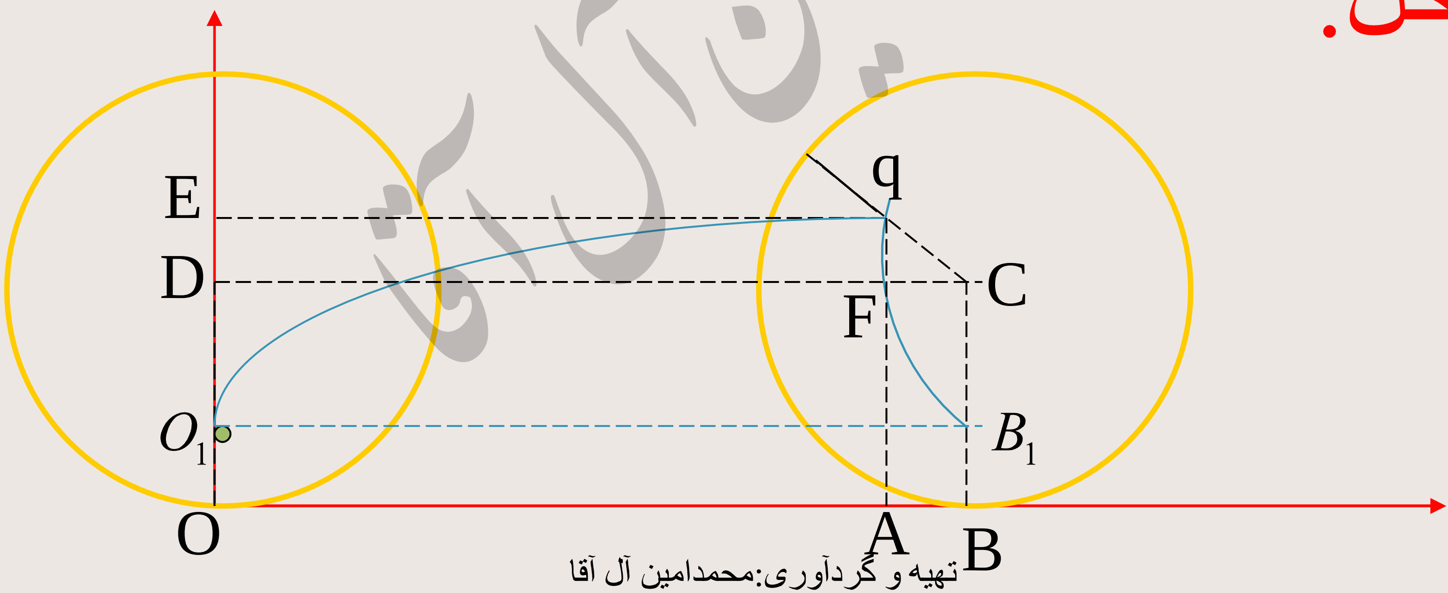
را اثر یا مسیر خم (و گاه خود خم) گویند.

روش يافتن اثر خم:با نقطه يابي يا پيدا كردن محل برخورد دو رويه كه از حذف پارامتر بين هر دو مؤلفه تابع بدست ميآيد.

- مثال:قسمتي از خم زيركه در يك هشتم اول دستگاهمختصات است را بدست آوريد: $y^2 = 4z, x^2 = 4y$
- حل:


0.08
0.06
0.04
0.02
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6

- تمرين:قرصي به شعاع a در صفحه xoy روي محور x بدون اينكه بلغزد ميغلتد. نقطهq بر اين قرص واقع است .معادلات پارامتري q را پيدا كنيد.
- حل:



ادامه حل:q:(x=oB-AB,y=oD+DE)

مسافت طي شده بوسيلهq :

$$o_1q = B_1q = a_1t$$

در مثلث قايم الزاويهCFq داريم:

AB=CF,DE=Fq

$$CF = a_1 \cos(t - \frac{\pi}{2}) = a_1 \sin t$$

$$Fq = a_1 \sin(t - \frac{\pi}{2}) = -a_1 \cos t$$

$$x = at - a_1 \sin t, y = a - a_1 \cos t$$

تعريف مشتق:تابع برداري f در نقطه x=t مشتق پذير است اگرحد زير وجود داشته باشد:

$$f:[a,b]\to R^n,(n=2or3),x=t\in[a,b]$$

$$\lim_{x\to t}\frac{1}{x-t}(f(x)-f(t))$$

- بديهي است در نقاط t=b ,t=a منظور از وجود حد فوق، وجود حدهاي يكطرفه است.

در اين صورت حد فوق را مشتق f در نقطه t مينامندوبا نمادهاي زير نشان ميدهند:

$$\frac{df}{dt}=f'(t)$$

توضیح:به ازاي n=2: $f'(t)=(f_1'(t),f_2'(t))$

به ازاي n=3 : $f'(t)=(f_1'(t),f_2'(t),f_3'(t))$

- بنابر اینf در نقطه t مشتق پذیر است اگر وتنها اگر مؤلفه هاي آن در این نقطه مشتق پذیر باشند
- مثال:مشتق تابع رادر نقطه داده شده پیدا کنید.

$$f(x)=(e^{1-x^2},\ln x,1-x^2),x={}^1\!/_2$$

$$f'(x)=(-2xe^{1-x^2},{}^1\!/_x,-2x)\Rightarrow f'({}^1\!/_2)=(-e^{{}^3\!/_4},2,-1)$$

قضیه:(قواعد مشتق گیري)

$\phi:[a,b]\rightarrow R,$

$n=2or3:\quad g,f:[a,b]\rightarrow R^n,\alpha,\beta\in R^n$

$$((\alpha f+\beta g))'(t)=\alpha f'(t)+\beta g'(t)$$

$$(f.g)'(t)=f'(t)g(t)+f(t)g'(t)$$

$$(f\times g)'(t)=f'(t)\times g(t)+f(t)\times g'(t)$$

$$(\phi f)'(t)=\phi'(t)f(t)+\phi(t)f'(t)$$

مثال:

$$f(t)=(\sqrt{t+1},t^2-1,2t),g(t)=(\frac{2t}{t^2+1},\frac{t^2-1}{t^2+1},2t)$$

$$\phi(t)=\ln(2t+1),(f.g)'(0)=?,(f\times g)'(0)=?,(\phi f)'(0)=?$$

حل:

$$f(0)=(1,-1,0),g(0)=(0,-1,0),\phi(0)=0$$

$$g'(x)=(\frac{2(t^2+1)-4t^2}{(t^2+1)^2},\frac{2t(t^2+1)-2t(t^2-1)}{(t^2+1)^2},2)$$

$$f'(x)=(\frac{1}{2\sqrt{t}},2t,2),\phi'(t)=\frac{2}{2t+1}$$

$$f'(0)=(\frac{1}{2},0,2),g'(0)=(2,0,2),\phi'(0)=2$$

$$(f.g)'(0)=f'(0).g(0)+f(0).g'(0)$$

ادامه حل:

$$(f\times g)(0)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=(2,0,\frac{1}{2})+(-2,-2,2)=(0,-2,\frac{3}{2})$$

$$(\phi f)'(0)=\phi'(0)f(0)+\phi(0)f'(0)=2(1,-1,0)=(2,-1,0)$$

قضيه:(قاعده زنجيره اي)

$t \in [a,b]$

$$\begin{tikzcd} {[a,b]} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gof"'] & I \arrow[r, "g"] & R^n \end{tikzcd} \qquad n = 2 or 3$$

$f[a,b] \subset I$

- توابع فوق را با I كه بازه اي در R است در نظر بگيريد. فرض كنيد f در نقطه t و g در s=f(t) مشتق پذير است. در اين صورت تابع برداري gof در نقطه t مشتق پذير است و داريم

$$\frac{d(gof)}{dt} = \frac{dg}{ds}.\frac{ds}{dt} = \frac{dg}{ds}\frac{df}{dt} = (gof)'(t) = g'(f(t))f'(t)$$

مثال: مشتق تابع زیر را در نقطه t=1 بیابید

$$h(t)=(\cos(2+\ln t),2+\ln t,(2+\ln t)^4)$$

حل:

$$h'(t)=(-\tfrac{1}{t}\sin(2+\ln t),\tfrac{1}{t},4\tfrac{1}{t}(2+\ln t)^3)$$

$$h'(1)=(-\sin 2,1,32)$$

تعريف خم هموار: $f:[a,b]\rightarrow R^n \quad n=2or3$

- تابع فوق را روي دامنه اش هموار گويند اگر به ازاي هر $t\in[a,b]$ ، $f'(t)$ وجود داشته و پيوسته باشد و $|f'(t)|\neq 0:\forall t$
- بنابر اين خم f هميشه روي (a,b) هموار است اگر وتنها اگر در هر نقطه $t\in[a,b]$ مشتق يكي از مؤلفه هاي آن غير صفر باشد.

مثال: آیا خم زیر در بازه[۱و ۱-] هموار است.

$$f(t) = (|t|, \ln(1+t), 1+t^2)$$

حل: تابع فوق روي بازه داده شده هموار نيست زيرا در در نقطه صفر مؤلفه اول آن مشتق پذير نيست

تعريف خم پاره هموار:

$f:[a,b]\to R^n \quad n=2or3$

- خم فوق را پاره هموار نامند اگر در تعداد متناهي نقطه از دامنه هموار نباشد.
- به عبارت ديگر خم f پاره هموار است اگر نقطه هاي $t_1,t_2,....,t_n\in[a,b]$ وجود داشته باشند بطوري كه f در اين نقطه ها يا مشتق نداشته باشد يا در شرط $|f'(t)|=0$ صدق كند ولي در بقيه نقاط [a,b] درشرط $|f'(t)|\neq 0$ صدق كند.

مثال: خم $f(t)=(t^2,t^2,t^4)$ در نقطه t=0

هموار نیست، زیرا: $|f'(0)|=0$

- تعریف طول خم: فرض کنید:

$f:[a,b]\to R^n \quad n=2or3$

:

خمي هموار باشد، طول اين خم را باى نشان ميدهند و با رابطه زير تعريف مكنند:

$$s=\int_a^b |f'(t)|dt$$

تعمیم تعریف طول خم: اگر f در نقاط زیر

پاره هموار باشد $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [a,b]$

و $a \le t_1 \prec t_2 \prec \ldots \prec t_n \le b$ طول f را با

رابطه زیر تعریف میکنند:

$$s = \int_a^{t_1} |f'(t)|dt + \int_{t_1}^{t_2} |f'(t)|dt + \ldots + \int_{t_n}^{b} |f'(t)|dt$$

با قراردادن $a = t_0, b = t_{n+1}$ این فرمول

بصورت زیر در میآید:

$$s = \sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |f'(t)|dt$$

مثال: اگر خم ذیل در بازه داده شده هموار است طول خم را پیدا کنید.

$$f(t)=(t^3,t^2),t\in[1,3]$$

حل:

$f'(t)=(3t^2,2t)\neq 0$ ⟹ هموار است

$$|f'(t)|=\sqrt{9t^4+4t^2}=t\sqrt{9t^2+4}\Rightarrow s=\int_1^3 t\sqrt{9t^2+4}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{18}(9t^2+4)^{3/2}\Big|_1^3=\frac{1}{27}(85^{3/2}-13^{3/2})$$

توابع چند متغیری

تعریف توابع اسکالر:

$$F: A \to B$$

$$A \subseteq R^2$$

$$B \subseteq R$$

مثال تابع دومتغیره اسکالر:

$$F(x,y)=x+y+z \qquad (x,y)\in R^2$$

$$F(1,0)=1+0+2=3$$

اعمال جبری مانند توابع حقیقی است

تعریف توابع برداری:

$$F : A \rightarrow B$$

$$A \subseteq R^n$$

$$B \subseteq R^m$$

بنابراین تابع اسکالر حالت خاص تابع برداری است

مثالی از تابع برداری :

$$f: t \to (\cos t, \sin t) \qquad t \in R$$

t=0 $\qquad$ f(0) = (1,0)

یا $\qquad f(x,y,z)=(x+y,z)$

تعریف: درتابع برداری زیر

$$\mathbf{f}:\mathbf{X}\rightarrow\left(\mathbf{f}_1(X),\ldots,\mathbf{f}_m(X)\right), \quad X\in A\subseteq R^n$$

$$\mathbf{f}_i : \mathbf{A}\rightarrow\mathbf{R} \qquad i=1,2,3,\ldots,m$$

توابع اسکالر f_i را توابع مولفه ای ویا مولفه های تابع برداری fمی نامیم .

مثال :

$$f(x,y,z)\rightarrow(x+y+z,xy+yy+yx+xyz)$$

$$f_1:(x,y,y)\rightarrow x+y+z$$

$$f_2:(x,y,y)\rightarrow xy+yz+zx$$

$$f_3:(x,y,y)\rightarrow xyz$$

تعریف : در تابع برداری

$$f: X \to \left(f_1(x), \ldots, f_m(x) \right) X \in A \subseteq R^n$$

با انتخاب متغیرهای وابسته u_1 ,..., u_m

معادلات $u_1 = f_1(x)$,..., $u_m = f_m(x)$ را

معادلات تابع برداری f می نامیم .

اعمال جبری مانند بردارهاست

تعریف : در تابع چند متغیره

$$f : X \to (f1(X),\ldots,fm(X)) \quad ,$$

$$X \sim (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A \subseteq R^n$$

۱) اگر $B \subseteq A$ $\Leftarrow$ $f(B) = \{y \in R^m \mid f(X) = y, X \in B\}$

را **تصویر مجموعه B تحت f** می نامند .

۲) مجموعه زیررا **<u>نمودار تابع f</u>** می نامند :

$$\{Z \mid Z \sim (X, f(X)) = (x1,\ldots,xn, f1(x),\ldots, fm(x)\} = GRF$$

۳) نقطه $y_0 \in f(A)$ را در نظر می گیریم ، مجموعه

$E = \{X \in A \mid f(X) = y_0\}$ را <u>مجموعه ترازتابع f</u>

به ازاء y_0 نامند . که اگر تابع f اسکالر دو متغیره باشد

مجموعه های تراز را <u>منحنی های تراز</u> این تابع و اگر f

اسکالرسه متغیره باشد مجموعه های ترازرا <u>سطوح تراز</u>

نامند .

مثال ۱: $f: t \to (2t+1, -t) \quad t \in R$

تصویر فاصله $[-1/2\ ,\ 0\ ]$ تحت f: $\quad A = f\left(\left[-\frac{1}{2}, 0\right]\right)$

$$= \left\{(x, y) \mid x = 2t + 1, y = -t, t \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]\right\}$$

$$A = f\left(\left[-\frac{1}{2}, 0\right]\right) = \left\{(x, y) \mid y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, x \in [0,1]\right\}$$

$$GRF=\{(x,y,z)\mid(x,y,z)=(t,f(t)),t\in R\}$$

$$=\{(x,y,z)\mid(x,y,z)=(t,2t+1,-t),t\in R\}$$

$$=\{(x,y,z)\mid x=t,y=2t+1,z=-t,t\in R\}$$

که معادلات پارامتری خطی است که از نقطه (۰و۱و۰)

می گذرد و با بردار (1,2,-1)~ u موازی است .

مثال۲ :

تابع برداری سه متغیره زیر و نقطه $(1,2)\in R^2$ را در نظر می گیریم ، مجموعه تراز تابع f به ازاء نقطه (۲و۱) را بدست آورید .

$$f:(x,y,z)\to\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4},z\right)$$

$$A = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) = (1,2)\}$$

$$= \left\{(x,y,z) \,\middle|\, \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4}, z\right) = (1,2)\right\}$$

$$= \left\{(x,y,z) \,\middle|\, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1, z = 2\right\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{A} = \left\{\frac{\mathrm{x}^2}{8} + \frac{\mathrm{y}^2}{18} = 1\right\}$$

بیضی واقع در

صفحه Z = 2

تعریف همسایگی :

$$N(a,r)=\left\{x\in R^2 \,|\, |x-a|<r\right\}$$

a : مرکز   r : شعاع

۱) اگر $a\in R^2$ باشد همسایگی را قرص به مرکزa گویند .

۲)و اگر $a\in R^3$ باشد همسایگی را یک گوی گویند .

۳)همسایگی در Rn تعبیر هندسی ندارد .

تعریف فاصله :

فاصله نقطه x از a عبارت است از :

$$|x-a|=\sqrt{(x_1-a_1)^2+\ldots+(x_n-a_n)^2}$$

مثال :

قرص $N((0,0),2)$ عبارت است از:

$$N((0,0),2)=\left\{(x,y)\in R^2 \mid \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<2\right\}$$

$$=\left\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2<4\right\}$$

مثال :

نشان می دهیم که درهر همسایگی میتوان یک همسایگی کوچکتر محاط کرد . یعنی :

$$\forall x \in N(x_0,r) \ :\exists \delta > 0 \ \ N(x,\delta) \subseteq N(x_0,r)$$

حل : فرض $\mathbf{x \in N(x_0,r) \Rightarrow |x - x_0| < r}$

فرض $\mathbf{0 \le \delta = r - |x - x_0| < r}$

حال برای اثبات yدلخواه را در نظر می گیریم:

$$\mathbf{y \in N(x_0,r) \ \Rightarrow |y - x| < \delta}$$

براساس نامساویمثلث

$$|y - x_0| = |(y-x)+(x-x_0)| \le$$

$$|y-x| + |x-x_0| < \delta + |x-x_0| = r$$

$$\Rightarrow \quad y \in N(x_0, r)$$

$$\Rightarrow \quad N(x,\delta) \subseteq N(x_0, r)$$

تعریف مجموعه باز :

فرض کنیم $U \subseteq R^n$ آنگاه Uرا یک مجموعه باز

درR^n می نامیم هرگاه :

$$\forall x \in U \ : \ \exists r > 0 : \ N(x,r) \subseteq U$$

مثال :

$A = \{ (x,y) \in R \mid x > 0 \}$ یک زیرمجموعه باز

از R^2 است: زیرا

$$\forall (x,y) \in A \quad \ni r > 0 \; : \; N((x,y),r) \subseteq A \quad ?$$

فرض $(x,y) \in A \Rightarrow X > 0 \xrightarrow{\text{فرض}} r=x$

برای اثبات داریم: $(x_1, y_1) \in N((x,y),r) \overset{?}{\Rightarrow} x_1 > 0$

$$|x_1 - x| = \sqrt{|x_1 - x|} \leq$$

$$\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} < r = x$$

$$\Rightarrow\ -x < x_1 - x < x$$

$$\Rightarrow\ 0 < x_1 < 2x$$ وحکم ثابت است .

تعریف مجموعه بسته :

$F \subseteq R^n$ را بسته گوئیم هرگاه F^C (متمم F)

در R^n باز باشد .

$V=\{(x,y) \int x\le 0, y\ge 0\}$ در R^C

بسته است. زیرا

$$V^c=\{(x,y)\mid x>0, y<0\}$$

تعریف مجموعه کراندار :

$S \subseteq R^2$ را کراندار گویند اگر S زیرمجموعه ای از یک قرص باشد . بعبارت دیگر :

$\exists\ M > 0 \ : S \subset D_M(0,0)$ اگر: S کراندار است

$S \subseteq R^3$ را کراندار گویند اگر S زیرمجموعه ای از یک گوی باشد . بعبارت دیگر :

$\exists\ M > 0 \ : S \subset D_M(0,0,0)$ اگر: S کراندار است

در غیراینصورت S را بی کران گویند .

یعنی خارج هر قرص به مرکز مبدأ نقطه ای

از S واقع است .

مثال :

$\left\{(x,y)\ |\ (x-1)^2+(y-1)^2<5\right\}$ کراندار است

زیرا مجموعه همه نقاط داخل دایره به شعاع $\sqrt{5}$ و مرکز(۱و۱) است . بنابراین کافی است قرصی انتخاب شود که همه دایره را در برگیرد . یعنی کافی است $M>\sqrt{5}+\sqrt{2}$ باشد .

تعریف مجموعه همبند :

$C \subset R^n$ (n=2,3) را همبند گویند هر گاه بتوان

هر دونقطه x ,y از آن را توسط یک خط شکسته

واقع در آن بهم وصل کرد .

مجموعه باز همبند را یک ناحیه گویند .

تعریف همسایگی محذوف یا بدون مرکز :

$a \in R^n$, $N(a,r)$ مفروض

$$N'(a,r) = N(a,r) - \{a\}$$

$$= \left\{ x \in R^n \mid 0 < |x - a| < r \right\}$$

مثال : $N((1,0,1),2)$ در R^3 باز است . زیرا :

فرض $X_0 \subset N((1,0,1),2)$

$$\Rightarrow \exists \ \delta > 0 \ : N(X_0,\delta) \subseteq N((1,0,1),2)$$

اگر: فرض $\delta = 2 - \left|(1,0,1) - X_0\right|$

$$= 2 - \sqrt{(1-x_0)^2 + y_0^2 + (1-z_0)^2}$$

$$\Rightarrow 0 < \delta < 2$$

برای اثبات در نظر می گیریم : $X \in N(x_0, \delta)$

بنابر نا مساوی مثلث

$$|X-(1,0,1)| = |X - X_0 + X_0 - (1,0,1)|$$

$$\leq |X - X_0| + |X_0 - (1,0,1)| < \delta + |X_0 - (1,0,1)| = 2$$

$$\Rightarrow X \in N((1,0,1),2)$$

$$\Rightarrow N(X_0, \delta) \subseteq N((1,0,1),2) \Rightarrow$$ باز است

تعریف حد : در نظر می گیریم

$,x_0 \in R^n$ $,A \subseteq R^n$ $,B \subseteq R^m$ $F: A \to B$ تابع

فرض کنید A شامل یک همسایگی محذوف نقطه x_0 است .

گوئیم F در نقطه x_0 دارای حد $L \in R^m$ است اگر :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \forall x \in N(x_0, \delta) : f(x) \in N(L, \varepsilon)$$

در این صورت می نویسیم :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

و يا :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0:$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

مثال :

نشان می دهیم حد تابع $F(x,y) \to x_0 : (x,y) \in R^2$

در نقطه $X_0 \sim (x_0, y_0)$ برابر x_0 است.

$$\left|F(x,y) - x_0\right| = \left|x - x_0\right| \le \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$\left|(x,y) - (x_0, y_0)\right| = \left|X - X_0\right| < \varepsilon \Rightarrow \delta = \varepsilon$$

$$\left|X - X_0\right| < \delta \Rightarrow \left|F(X) - X_0\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x,y) = y_0$$

و بطور کلی همان فرمول حد برای تابع n متغیره

صحیح است .

$$\lim_{X\to X_0} F(X) = F(X_0)$$

مثال:

نشان می دهیم که تابع زیردرنقطه $X_0 \sim (0,0)$ حد ندارد .

$$F(x,y) \to \frac{x^2}{x^2+y^2} : (x,y) \in R^2 - \{(0,0)\}$$

فرض خلف :

$$\lim_{X \to X_0} F(X) = L$$

بنابراین برای $\varepsilon = \varepsilon_0$ باید عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد بطوریکه :

$$0 < |X - X_0| < \delta \Rightarrow |F(X) - L| < \varepsilon_0$$

$$0 < |X| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} - L \right| < \varepsilon_0$$

حالا نقطه $\left(0,\frac{\delta}{2}\right)$ را در نظر می گیریم چون

$$\left|\left(0,\frac{\delta}{2}\right)\right| = \left|\frac{\delta}{2}\right| < \delta, \qquad F\left(0,\frac{\delta}{2}\right) = 0$$

داریم $|L| < \varepsilon_0$ 1

حال اگر نقطه $\left(\frac{\delta}{2},0\right)$ را در نظر بگیریم چون

$$F\left(\frac{\delta}{2},0\right) = 1, \qquad \left|\left(\frac{\delta}{2},0\right)\right| < \delta$$

داریم $|1-L| < \varepsilon_0$ 2

$$\Rightarrow 1 = |L + 1 - L| \le |L| + |1 - L|$$

$$< \varepsilon_0 + \varepsilon_0 = 2\varepsilon_0$$

حال اگر : $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$

$\Leftarrow \quad 1 < 1$ که تناقض است بنابراین تابع حد ندارد .

حد در صورت وجود منحصر به فرد است.

کلیه فرمولهای حد توابع حقیقی در مورد توابع چند متغیره نیز صادق است.

بنابراین اگر هر مولفه حد داشته باشد تابع حد دارد .

مثال :

$$F:(x,y,z)\rightarrow\left(x^2+y^2,xy,\frac{1}{x^2+y^2+z^2+1}\right)$$

$$X_0\approx(1,0,2)$$

$$\lim_{(x,y,z)\rightarrow x_0} f(x,y,z)=\left(1,0,\frac{1}{6}\right)$$

پیوستگی مثل توابع حقیقی ، اگر حد با مقدارتابع

برابرباشد پیوسته است و بطور کلی وقتی همه

مولفه هاپیوسته باشند تابع پیوسته است .

نكاتي درمورد پيوستگي

تعريف: هر گاه f يك تابع دو متغيره بوده ونمو f در نقطه (x_0, y_0) را چنين نمايش دهيم:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = \Delta f(x_0, y_0) =$$

$$= D_1 f(x_0, y_0)\Delta x + D_2 f(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

بطوريكه: $\exists \varepsilon_1 = \varepsilon_1(\Delta x) \quad , \quad \exists \varepsilon_2 = \varepsilon_2(\Delta x)$

تعریف مشتقپذیري

اگر در تعریف قبل داشته باشیم:

$$(\Delta x, \Delta y) \to (0,0) \Rightarrow \varepsilon_1 \to 0, \varepsilon_2 \to 0$$

در اینصورت f در (x_0, y_0) مشتقپذیر است.

قضیه: هر گاه تابع دو متغیره f در نقطه اي مشتقپذیر باشد در آن نقطه پیوسته است.

قضیه: اگر مشتقات جزئي تابع دو متغیره بر قرص باز موجود و در نقطه a پیوسته باشد آنگاه f در آن نقطه مشتقپذیر است.

مثال:

$$f(x,y)=3x-xy^2$$

$$D_1=3-y^2 \quad , \quad D_2=-2xy$$

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=$$

$$=3\Delta x-y_0^2\Delta x-2x_0y_0\Delta y-2y_0\Delta x\Delta y-$$

$$-x_0(\Delta y)^2-\Delta x(\Delta y)^2$$

با استفاده از تعریف محاسبه میکنیم:

$$\Delta f(x_0,y_0)-D_1f(x_0,y_0)\Delta x-D_2f(x_0,y_0)\Delta y=$$

$$=\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_{2\Delta}y$$

طرف چپ ۱ پس از خلاصه کردن:

$$= -x_0(\Delta y)^2 - 2y_0\Delta x\Delta y - \Delta x(\Delta y)^2$$

که بايد به يکي از چهار طريق زير معادل طرف راست ۱ باشد. يعني:

$$[-2y_0\Delta y - (\Delta y)^2]\Delta x + (-x_0\Delta y)\Delta y$$

$$(-2y_0\Delta y)\Delta x + (-\Delta x\Delta y - x_0\Delta y)\Delta y$$

$$(-(\Delta y)^2]\Delta x + (-y_0\Delta x - x_0\Delta y)\Delta y$$

$$0\Delta x + [-2y_0\Delta x - \Delta x\Delta y - x_0\Delta y]\Delta y$$

چون توابع $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ وجود دارند كافي است در يك مورد نشان داده شود كه

$$(\Delta x, \Delta y) \to (0,0) \Rightarrow \varepsilon_1 \to 0, \varepsilon_2 \to 0$$

بنابراين

$$\varepsilon_1 = -2y_0\Delta y - (\Delta y)^2 \quad , \quad \varepsilon_2 = -x_0\Delta y$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1 = 0 \quad , \quad \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2 = 0$$

در نتیجه تابع مشتقپذیر بوده

و در نقطه (x_0, y_0)

پیوسته است.

مثال:در مورد پيوستگي تابع زير تحقيق كنيد:

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$$

$$D_1f=\frac{2xy^6}{(x^2+y^4)^2}\Rightarrow x=my^2\Rightarrow$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{2xy^6}{(x^2+y^4)^2}=\frac{4m}{(m^2+1)^2}$$

بنابر اين حد ندارد و در نتيجه پيوسته نيست.

تمرین: نشان دهید تابع زیر پیوسته است

$$f(x,y,z)=\cosh(x^2+y^2+z^2)+e^{x^2+y^2+1}+\sinh xyz$$

پیوسته

چون توابع هیپربولیك و نمائي پیوسته و ترکیب توابع پیوسته، پیوسته است بنابراین تابع f پیوسته است

تعریف مشتق جزئی :

اگر تابع اسکالر $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{F:A}$: $\mathbf{A \subseteq R^n}$ روی یک همسایگی نقطه

$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) \in \mathbf{A}$ تعریف شده باشد در اینصورت رابطه زیر را در

صورت وجود مشتق جزئی F درنقطه X نسبت به متغیر i ام نامند و با

$\dfrac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{x}_i}$ یا $\mathbf{F}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{X})$ یا $\mathbf{D}_i\mathbf{F}(\mathbf{X})$ نشان می دهند .

$$\lim_{n \to 0} \frac{F(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_h) - F(x_1, \ldots x_h)}{h}$$

مثال :

$$F:(x,y)\to x^2y+y^3$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h,y)-F(x,y)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2y+y^3-(x^2y+y^3)}{h}=2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2+3y^2$$

مشتقات جزئی مراتب بالا تر

مثال :

$$F(x,y) \to xy + x^2y^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(X) = y + 2xy^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(X) = x + 3x^2y^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) = 2y^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1 + 6xy \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 + 6xy$$

تساوی وقتی برقرار است که پیوسته باشد .

اگر مشتقات جزئی موجود وپیوسته باشند تا هر مرتبه ای گویند تابع از رده

C^n (n همان مرتبه) است .

مثال :

$$f:(x,y)\to\left(x^2+xy,x^2y+y^2\right)$$

$$(x,y)\in R^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(2x+y,2xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\left(x,x^2+2y\right)$$

تمرين: مشتقات جزئي تابع زير را پيدا كنيد:

$$f(\lambda,\mu)=\frac{\sin\lambda\mu}{1+\lambda^2+\mu^2},\quad p=(1,\frac{\pi}{3})$$

$$\frac{\partial f}{\partial\lambda}=\frac{\mu\cos\lambda\mu(1+\lambda^2+\mu^2)-2\lambda\sin\lambda\mu}{(1+\lambda^2+\mu^2)^2}$$

$$\frac{\partial f(p)}{\partial\lambda}=\frac{\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}\times(2+\frac{\pi^2}{9})-2\sin\frac{\pi}{3}}{(2+\frac{\pi^2}{9})^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}=\frac{\lambda\cos\lambda\mu(1+\lambda^2+\mu^2)-2\mu\sin\lambda\mu}{(1+\lambda^2+\mu^2)^2}$$

$$\frac{\partial f(p)}{\partial \lambda}=\frac{\cos\frac{\pi}{3}\times(2+\frac{\pi^2}{9})-2\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}}{(2+\frac{\pi^2}{9})^2}$$

تمرين: اگر تابع f داراي مشتقات جزئي پيوسته باشدو v=x-y, u=x+y, w=f(u,v) ثابت كنيد:

$$\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2-\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

حل:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial u},\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\left(\frac{\partial f}{\partial u},-\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

تمرین:مشتق جزئي تابع داده شده را در نقطه داده شده پیدا کنید

$$w = \frac{xy}{z}\cos y^{z} \quad , \quad p(1, \pi, 1/2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{y}{z}\cos y^{z}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(p) = 2\pi\cos\pi^{1/2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{x}{z}\cos y^z - xy^z \sin y^z$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(p) = 2\cos \pi^{1/2} - \pi^{1/2} \sin \pi^{1/2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{xy}{z^2}\cos y^z - \frac{xy^{z+1} Lny}{z}\sin y^z$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}(p) = -4\pi \cos \pi^{1/2} - 2\pi^{3/2} \sin \pi^{1/2}$$

تعریف مشتق جهت دار :

با فرض: V برداروا حد, $f : A \to R \;, x_0 \in A$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} = D_V f(x_0)$$

در صورت وجود مشتق جهت دار f در نقطه x_0 و در جهت V است .

مثال : $f:(x,y)\rightarrow 2xy^2-3x^2+5y$

در نقطه $x_0=(1,2)$

و در جهت بردار واحد $V=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

داریم : $x_0+hv=(1,2)+\left(\frac{h}{\sqrt{2}},\frac{-h}{\sqrt{2}}\right)=$

$$\left(1+\frac{h}{\sqrt{2}},2-\frac{h}{\sqrt{2}}\right)$$

$$f(x_0 + hv) - f(x_0) = 2\left(1 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)\left(2 - \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$-3\left(1 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 + 5\left(2 - \frac{h}{\sqrt{2}}\right) - 15 =$$

$$= \frac{h^3}{\sqrt{2}} - \frac{9}{2}h^2 - \frac{11}{\sqrt{2}}h$$

$$D_V f(1,2)=$$

$$\lim \frac{\frac{h^3}{\sqrt{2}}-\frac{9}{2}h^2-\frac{11}{\sqrt{2}}h}{h}=-\frac{11}{\sqrt{2}}$$

تعریف مماس و قائم :

صفحه π در نقطه P بر رویه S مماس است

اگر π برمنحنی های واقع برS ومار بر P

مماس باشد. بعبارت دیگر صفحه π در نقطه P

بر رویه S مماس است اگر شامل تمام خطوطی

باشد که در نقطه P به منحنی های واقع بر S

و مار بر P مماس باشد .

خطی که از P گذشته و بر صفحه مماس بر S در P

عمودباشد، خط عمود برS درنقطه Pنامیده می شود .

فرمول امتداد قائم بر صفحه مماس بر رویه $S \in R^3$

در نقطه $P\left(x_0, y_0, z_0\right)$:

$$N = -f_1(x_0, y_0)i - f_2(x_0, y_0)j + k$$

معادله صفحه مماس بر رویه S در نقطه P :

$$\mp f_1(x_0,y_0)(x-x_0)\mp f_2(x_0,y_0)(y-y_0)$$
$$\pm(z-z_0)=0$$

معادله خط قائم بر رویه **S** در نقطه **P** :

$$\frac{x-x_0}{f_1(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_2(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

مثال :

$$Z = COS\frac{\pi x}{2} \qquad P\left(1,0,0\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2} = -\frac{\pi}{2} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

معادله صفحه مماس $-\frac{\pi}{2}(x-1) + 0(y) - (z) = 0$

معادله خط قائم $\frac{x-1}{-\frac{\pi}{2}} = \frac{z}{1}$

شرط وجود صفحه مماس :

اگر تابع $z=f(x,y)$ روی مستطیل باز زیر پیوسته باشد

$$R=\{(x,y)\,|\,|x-x_0|<h\ \ ,\ \ |y-y_0|<k\}$$

ومشتقات جزئی آن روی R وجود داشته ودرنقطه (x_0,y_0)

پیوسته باشد،(شرایط قضیه نمو)آنگاه تابع خطیL که نمودار

آن صفحه مماس بررویه Z درنقطه $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ است

وجود دارد . که نمودار آن صفحه مماس رویه است .

$$L(x,y)=f(x_0,y_0)+f_1(x_0,y_0)(x-x_0)+f_2(x_0,y_0)(y-y_0)$$

قاعده زنجیره ای :

$$g:R^2 \to R \quad , x = x(t) \quad , y = y(t)$$

اگر g دارای مشتقات جزئی روی همسایگی از نقطه (x_0,y_0) بوده و در این

نقطه پیوسته باشند و توابع x و y در نقطه $t=t_0$ مشتقپذیر آنگاه با فرض

$$\left(x(t_0),y(t_0)\right)=(x_0,y_0) \quad \text{تابع مرکب} \quad G(t)=g\left(x(t),y(t)\right)$$

درنقطه t_0 مشتقپذیر است و داریم :

$$\frac{dg}{dt}\Big|_{t=t_0} =$$

$$g(x(t_0)y(t_0)),x'(t_0)+g(x(t_0)y(t_0)),y'(t_0)$$

$$=g_1(x_0,y_0)x'(t_0)+g_2(x_0,y_0)y'(t_0)$$

$$=g_1x'+g_2y'$$

مثال:

$$T = Ln(xyzt) \;,\; x = \sin u \;,\; y = \cos u \;,\; z = e^{u} \;,\; t = e^{-u}$$

$$\frac{dT}{du} = \frac{\partial T}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial T}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial T}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial T}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial u}$$

$$= \frac{1}{x}\cos u - \frac{1}{y}\sin u + \frac{1}{z}e^{u} - \frac{1}{t}e^{-u} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y} + 1 - 1$$

$$= \frac{y^2 - x^2}{xy} - \frac{\cos 2u}{\frac{1}{2}\sin 2u} = 2\cot 2u$$

مشتق گیری ضمنی :

$$F(x,y,z)=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_1(x,y,z)}{F_3(x,y,z)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_2}{F_3}$$

$$F_3\neq 0$$

فرمول تقریب :

بشرط Δx و Δy بحد کافی کوچک

$$f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)\approx$$

$$f\left(x_0, y_0\right)+f_1\left(x_0, y_0\right)\Delta x+f_2\left(x_0, y_0\right)\Delta y$$

مثال : معادله صفحه مماس بر $xy+yz+zx=0$ را

در نقطه $(2,2,1)$ پیدا کنید .

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y+z}{y+x}=-\frac{3}{4} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x+z}{y+x}=-\frac{3}{4}$$

$$z-z_0=\frac{\partial z}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(y-y_0)$$

$$z-1=-\frac{3}{4}(x-2)-\frac{3}{4}(y-2)$$

تعریف گرادیان :

فرض کنیم تابع اسکالر n متغیره F روی مجموعه

$A \subseteq R^n$ دارای تمام مشتقات جزئی مرتبه اول باشد

در اینصورت :

$$\nabla f = gradf :$$

$$x :\to \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X), \frac{\partial f}{\partial x_2}(X), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X) \right)$$

$$, \ X \in A$$

مثال:

$$f:(x,y,z)\rightarrow 2x^2y+yz$$

$$\nabla f=\left(4xy,2x^2+z,y\right)$$

$$\nabla f(1,1,2)=(4,4,1)$$

قاعده زنجیره ای : (برداری و اسکالر)

$$g : B \to R \;,\; f : A \to B$$

$$A \subseteq R^{n} \;, B \subseteq R^{m}$$

g,f روی قلمروشان دارای مشتقات جزئی پیوسته اند .

در اینصورت داریم :

$$\frac{\partial gof}{\partial x_i}(X) = \nabla g(f(X)) . \frac{\partial f}{\partial x_i}(X)$$

مثال :

$$f:(x,y)\rightarrow(x+y,xy)$$

$$g:(x,y)\rightarrow x^2+y^2$$

$$\nabla g(x,y)=(2x,2y)$$

$$\Rightarrow \nabla g(f(x,y))=(2(x+y),2xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(1,2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(gof)}{\partial x}(x,y)=2(x+y)+2x^2y$$

حل مثال فوق از روش معمولی :

$$gof(x,y) = g(f(x,y)) = g(x+y, xy)$$

$$= (x+y)^2 + x^2 y^2$$

$$\frac{\partial(gof)}{\partial x}(x,y) = 2(x+y) + 2xy^2$$

که همان است .

قضیه :

رابطه بین مشتق جهت دار و گرادیان :

$$D_V f\left(X_0\right)=V\cdot\nabla f\left(X_0\right)$$

مثال :

مشتق جهت دارتابع روبرورا درنقطه $X_0 \sim (3,-1,-2)$

و در جهت بردار $V=\left(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right)$ بدست آورید :

$$f:(x,y,z)\rightarrow 2x^2y+yz$$

$$\nabla f=(-12,16,-1)$$

$$D_v f=\left(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right).(-12,16,-1)=\frac{18}{17}$$

تمرين:مشتق سوئي تابع داده شده را در نقطه وسوي تعيين شده پيدا كنيد:

$$f(x,y)=x\tan^{-1}\frac{y}{x} \quad , \quad x=(1,1) \quad , \quad A=2i-j$$

$$\nabla f=\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}+x\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2},\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)$$

$$\nabla f(1,1)=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$$

$$D_u f(1,1) = \nabla f(1,1).u =$$

$$= (\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}).(\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{\pi}{2} - 1 - 1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{\pi}{2} - 2)$$

تمرين:مشتق سوئي تابع داده شده را در نقطه وسوي تعيين شده پيدا كنيد:

$$f(x,y)=\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \quad , \quad p(6,6) \quad , \quad v=3i+4j$$

حل:

$$\nabla f=\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2},-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{x}\right)$$

$$\nabla f(p)=(0,0) \quad , \quad u=\frac{1}{5}(3i+4j)$$

$$D_u f(p)=0$$

تمرین: معادله صفحه مماس و خط قائم بر رویه داده شده را در نقطه داده شده پیدا کنید:

$$x^2 z - xy^2 - yz^2 = 8 \quad , \quad p = (0,-2,3)$$

$$\nabla = (2xz - y^2, -2xy - z^2, x^2 - 2yz)$$

$$\nabla(p) = (-4,-9,12)$$

$$-4(x-0) - 9(y+2) + 12(z-3) = 0$$

$$\frac{x}{-4} = \frac{y+2}{-9} = \frac{z-3}{12}$$

یادآوری بسط تیلور توابع یک متغیره :

اگر مشتقات مراتب مختلف تابع یک متغیره حقیقی **f** در

همسایگی **(a-h , a+h)** موجود باشند آنگاه

برای $x \in (a-h, a+h)$

وداریم :

$$f(x)=f(a)+\frac{(x-a)}{1!}f'(a)+\dots+$$

$$\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{(x-a)^{n}}{n!}f^{n}(\xi)$$

ξ بین a و x وجود دارد که

باقیمانده مرتبه n ام f در نقطه a :

$$\frac{(x-a)^{n}}{n!}f^{n}(\xi)$$

خواهیم داشت :

در فرمول فوق اگر باقیمانده نوشته نشود آن را چند جمله ای تیلور گویند

قضیه :

فرض کنیم f درهمسایگی N از نقطه (a,b) دارای

مشتقات جزئی مرتبه سوم پیوسته باشد . دراینصورت :

$$f : A \subseteq R^2 \to R$$

$$\forall (x,y) \in N : \exists \left(\xi, n\right) \in (x,y),\left(a,b\right)$$ خط واصل

$$f(x,y)=f(a,b)+(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+$$

$$(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)+R_1(x,y,a,b,\xi,n)$$

بسط تیلورمرتبه اول تابع f حول نقطه (a,b) باباقیمانده R است.

$$:f(x,y)=$$

$$f(a,b)+(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

$$+\frac{1}{2}[(x-a)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)+2(x-a)(y-b)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)+$$

$$(y-b)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}]+R_2\,(x,y,a,b,\xi,\eta)$$

که بسط تیلور مرتبه دوم تابع f حول نقطه (a,b) با باقیمانده R است.

مثال :

بسط تیلور مرتبه دوم تابع $f(x,y)=2x^2-xy-y^2$ را در

نقطه (a,b)=(0,0) محاسبه کنید .

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x-y=0 \qquad ,\frac{\partial f}{\partial y}=-x-2y=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4 \qquad ,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-1 \qquad ,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2$$

$$\Rightarrow f(x,y)=0+0+0+\frac{1}{2}\left[x^2+4+2xy(-1)+y^2(-2)\right]+R_2$$

تمرین: بسط تیلور مرتبه دوم تابع زیر را در نقطه داده شده پیدا کنید

$$f(x,y)=2x^2-xy-3y^2-3x+7y$$

حل:

$$(a,b)=(2,5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x-y-3\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(2,5)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-x-6y+7\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(2,5)=-25$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1$$

$$f(2,5) = -76$$

$$f(x,y) = -76 + 0(x-2) - 25(y-5) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(4(x-2)^2 - 2(x-2)(y-5) - 6(y-5)^2\right)$$

تمرین: بسط تیلور مرتبه دوم تابع زیر را در نقطه داده شده پیدا کنید

$$f(x,y)=x^2+xy+2y^2-3x+2y$$

$$(a,b)=(2,-1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y-3 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2,-1)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 4y + 2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2,-1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

$$f(2,-1) = -4$$

$$f(x,y) = -4 + \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} 2(x-2)^2 + \\ 2(x-2)(y+1) + 4(y+1)^2 \end{array}\right]$$

تعریف مینیمم و ماکسیمم :

$f:A\to B \qquad : A\subseteq R^n$

۱) $x_0\in A$ را یک نقطه مینیمم نسبی f می نامیم هرگاه $\exists N(x_0,r)\subseteq A$

بطوریکه :

$$x\in N'(x_0,r)\Rightarrow f(x_0)<f(x)$$

در این صورت $f(x_0)$ یک مینیمم نسبی f است .

۲) $x_0\in A$ رایک نقطه ماکزیمم نسبی f می نامیم هرگاه $\exists N(x_0,r)\subseteq A$

بطوریکه

$$x\in N'(x_0,r)\Rightarrow f(x)<f(x_0)$$

در اینصورت $f(x_0)$ را یک ماکزیمم نسبی f گویند .

۳) $x_0 \in A$ را یک نقطه ماکزیمم مطلق f نامند هرگاه $\forall x \in A$

$$f(x) \le f(x_0)$$

در اینصورت $f(x_0)$ را ماکزیمم مطلق f نامند .

۴) $x_0 \in A$ را یک نقطه مینیمم مطلق f نامند هرگاه $\forall x \in A$

$$f(x_0) \le f(x)$$

در اینصورت $f(x_0)$ را مینیمم مطلق f نامند .

مثال :

تابع $f(x,y)=2-x^2-y^2$ را در نظر می گیریم :

$$f(0,0)=2>2-x^2-y^2=f(x,y)$$

$\forall(x,y)\in R^2\Rightarrow$ (0,0) نقطه ماکزیمم مطلق است .

F(0,0) ماکزیمم مطلق و نسبی است .

مثال :

تابع $f(x,y)=(x-y+1)^2$ را در نظر می گیریم :

$$\forall (x,y)\in R^2 \qquad : f(x,y)\geq 0 \Rightarrow$$

چون مقدار تابع در هر نقطه خط $x-y+1=0$ برابر صفر است نقاط

روی خط فوق مینیمم مطلق f است .

قضیه :

$$f:A\to R \qquad , \qquad A\subseteq R^n$$

اگر f روی $N(x_0,r)$ مشتق پذیر باشد و $x_0\in N$ یک نقطه

ماکزیمم یا مینیمم نسبی f باشد . آنگاه

$$\nabla f(x_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)=(0,\ldots,0)$$

بعبارت دیگر :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)=\ldots=\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)=0$$

تعریف نقطه بحرانی :

$x_0 \in dom f$ را یک نقطه بحرانی f گویند اگر در یکی

از دو شرط زیر صدق کند :

الف) f در نقطه x_0 مشتق پذیر نباشد .(لااقل یکی از

مشتقات جزئی موجود نباشد .)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)=0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)=0 \end{cases}$$

ب) f در x_0 مشتقپذیر و $\nabla f(x_0)=0$

در نتیجه نقاط ماکزیمم و مینیمم یکی از نقاط بحرانی

است یعنی جواب دستگاه زیر یک نقطه بحرانی یا

ماکزیمم و مینیمم است .

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)=0 \end{cases}$$

در صورتیکه نقاط بحرانی ، ماکزیمم یا مینیمم نباشد

آنرا نقطه زین اسبی گویند .

مثال :

نقاط بحرانی تابع زیر کدامند ؟

$$f(x,y)=x^2+xy+2y^2-3x+2y$$

پاسخ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y-3=0$$

$$\Rightarrow y=-1,x=2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x+4y+2=0$$

نقاط بحرانی : (۱- و۲)

قضیه : (آزمون مشتق دوم)

$$f:A\to R \quad , \quad A\subseteq R^n$$

مفروض : $x_0\in A$, $N(x_0)$ همسایگی

فرض می کنیم f روی $N(x_0)$ از رده C^2 و x_0 یک نقطه

بحرانی f باشد در اینصورت :

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) \quad , \quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0)$$

$$C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0) \quad , \quad D=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2$$

آنگاه :

الف : اگر $D<0$ نقطه x_0 نقطه زین اسبی است .

ب: اگر $D>0$ و $A>0$ نقطه x_0 مینیمم نسبی است .

ج: اگر $D>0$ و $A<0$ نقطه x_0 ماکزیمم نسبی است .

د: اگر $D=0$ نمی توان اظهار نظر کرد .

مثال :

نوع نقاط بحرانی تابع زیر را تعیین کنید .

$$f(x,y)=x^3+y^2-3xy+15$$

پاسخ:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3y=0\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=0\\x=1\Rightarrow y=1\end{array}$$

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x \quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3 \quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y$$

ادامه جواب :

$$(0,0): A=0 \qquad B=-3 \qquad C=0$$

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}=-9<0 \Rightarrow$$ زین اسبی

$$(1,1): A=6>0 \qquad B=-3 \qquad C=6$$

$$D=AC-B^2=36-9>0 \Rightarrow$$ مینیمم نسبی

محاسبه ماکزیمم ومینیمم تحت شرایط خاص :

برای پیدا کردن نقطه ماکزیمم و مینیمم تابع f نسبت به شرط $g(x,y,z)=0$ باید دستگاه

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lambda\frac{\partial y}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\lambda\frac{\partial g}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\lambda\frac{\partial g}{\partial z} \qquad \left(g(x,y,z)\right)=0$$

را نسبت به x و y و z و λ حل نمود وجواب نقطه (x,y,z) است .

مثال :

ماکزیمم و مینیمم فاصله مبدا را تا منحنی زیر پیدا کنید .

$$5x^2+6xy+5y^2-8=0$$

پاسخ:

فرمول فاصله : $f=d=x^2+y^2$ (زیرا نقاط واقع بر این دایره بیشترین فاصله را دارند)

$$\begin{cases} 2x=\lambda(10x+6y) \\ 2y=\lambda(6x+10y) \\ 5x^2+6xy+5y^2-8=0 \end{cases} \Rightarrow 4\lambda(y^2-x^2)=0 \Rightarrow y=\pm x$$

$$2x^2=1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow f=1$$

مينيمم

نقاط ماكزيمم ومينيمم

$$x^2=2 \quad \Rightarrow \left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right) \quad , \quad \left(-\sqrt{2},+\sqrt{2}\right) \quad \Rightarrow f=4$$

ماكزيمم

تمرين: نشان دهيد كه ماكزيمم تابع

f(x,y,z)=x+y+z روي كره زير

عبارت است از $a\sqrt{3}$

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

حل:

$$g: x^2+y^2+z^2=a^2$$

$$\nabla f = (1,1,1) \quad , \quad \nabla g = (2x,2y,2z)$$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ 1 = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2\lambda} \\ y = \dfrac{1}{2\lambda} \\ z = \dfrac{1}{2\lambda} \\ (\dfrac{1}{2\lambda})^2 + (\dfrac{1}{2\lambda})^2 + (\dfrac{1}{2\lambda})^2 = a^2 \end{cases}$$

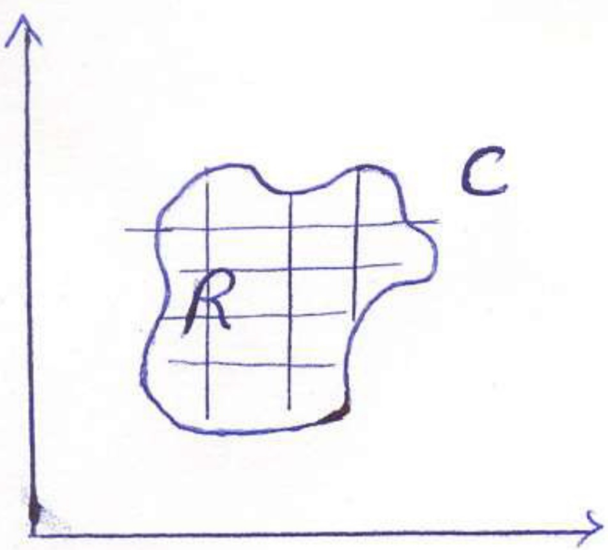
$$3(\frac{1}{2\lambda})^2 = a^2 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{2a} \Rightarrow x = y = z = \pm\frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$f\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{a}{\sqrt{3}}\right)=a\sqrt{3}$$

انتگرال دوبل:

انتگرال در ناحیه R که توسط منحنی C محدود شده:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$



برای محاسبه ناحیه را به مستطیل های کوچک تقسیم

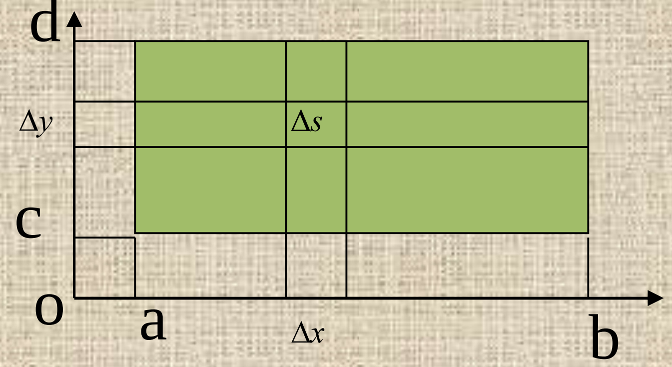
میکنیم ومشابه عملیات انتگرال معمولی مجموع مساحات

و حد آنها را حساب می نمائیم که به این ترتیب اگر ناحیه

f به مستطیلی فرض شود که توسط خطوط **y=d** و **y=c**

و **x=b** و **x=a** محدود شده خواهیم داشت :

حالت خاص :

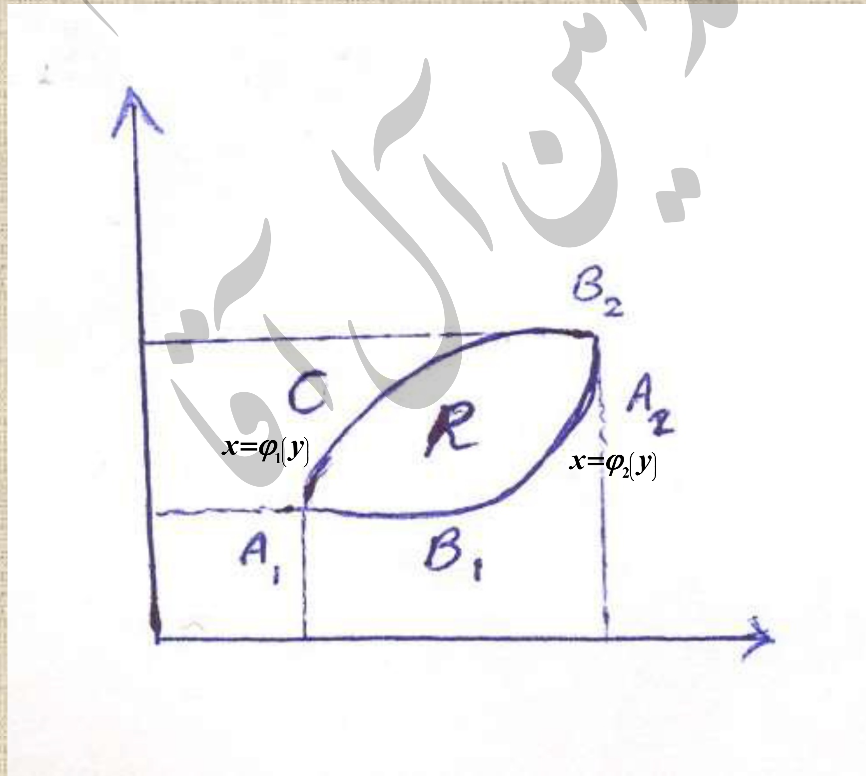


$$\int_R f(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dxdy$$

$$=\underbrace{\int_c^d \underbrace{\int_d^b f(x,y)}_{\text{اول محاسبه می شود}} dxdy}_{\text{بعد}} = \underbrace{\int_a^b \underbrace{\int_c^d f(x,y)}_{\text{اول محاسبه می شود}} dydx}_{\text{بعد}}$$

در حالت کلی R مستطیل نبوده و ناحیه ای باشد که با منحنی C محدود شده باشد .

فرض کنید که B_1 و B_2 به ترتیب مینیمم و ماکزیمم منحنی را تشکیل داده و A_1 و A_2 کمترین وبیشترین مقادیر C روی محور افقی را تعیین می کنند .



$x=\varphi_1(y)$ را معادله $B_1A_1B_2$ و $x=\varphi_2(y)$ را

معادله منحنی $B_1A_2B_2$ بگیرید . در اینصورت به جای

a و b مقادیر $\varphi_1(y)$ و $\varphi_2(y)$ و بجای c و d مقادیر

B_1 و B_2 قرار می گیرند . در نتیجه خواهیم داشت :

$$\int_R f(x,y)\,dA = \int_{B_1}^{B_2}\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

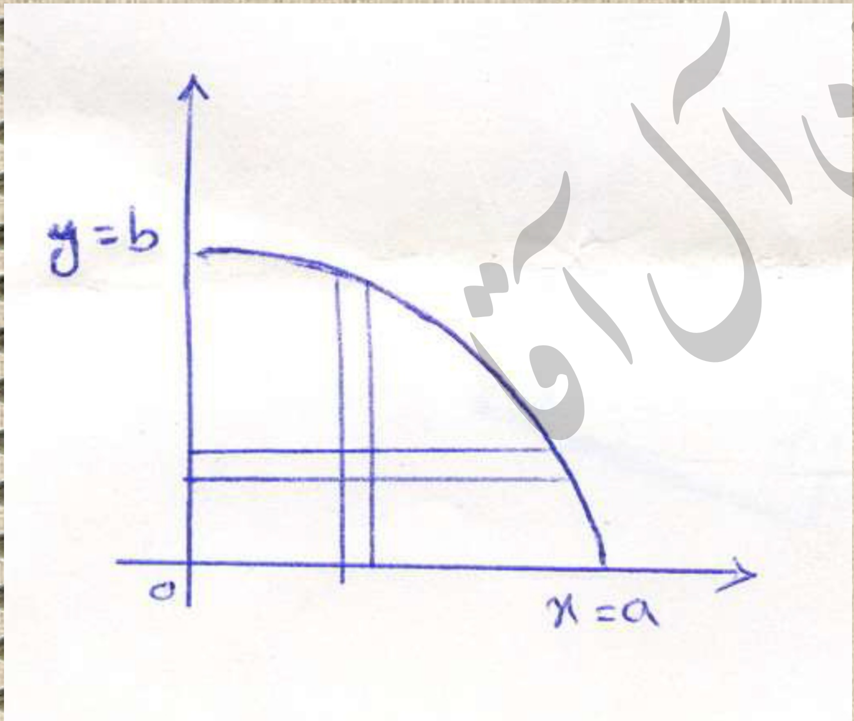
و بهمین ترتیب می توان نوشت :

$$\int_R f(x,y)\,dA = \int_{a_1}^{a_2}\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

مثال :

مقدار $I_1=\int_R ydA$ را روی ناحیه محدود شده R که ربع

بیضی ای به معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ است را محاسبه کنید .



پاسخ:

$$I_1=\int_0^b\int_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} ydxdy$$

$$=\int_0^b \left(xy \Big|_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} \right) dy$$

$$= \frac{a}{b}\int_0^b y\sqrt{b^2 - y^2}\,dy$$

$$= -\frac{a}{3b}\left(b^2 - y^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^b$$

$$= \frac{ab^2}{3}$$

که با توجه به مطالب ریاضی۱ همان مختص

y مرکز ثقل ربع بیضی است و بهمین ترتیب

$\frac{a^2b}{3} = \int xdA$ که مختص x مرکز

ثقل است .

چند مورد کاربردی

۱ـ ممان اینرسی :

ممان اینرسی یک ذره حول یک محور مساویست با حاصلضرب جرم آن در مربع فاصله آن از محور .

برای محاسبه ممان اینرسی یک ناحیه مسطح حول محوری عمود بر آن از انتگرال دوبل استفاده می کنیم.

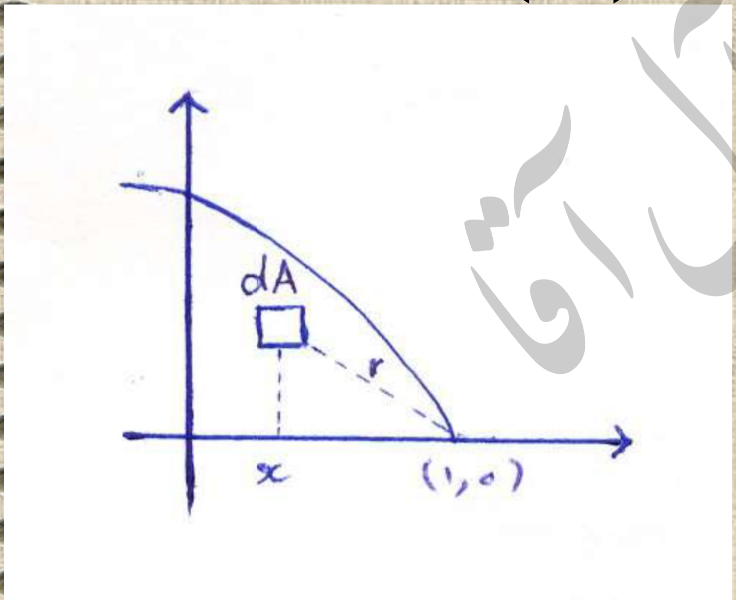
مثال :

ممان اینرسی سطحی را که در ربع اول دستگاه مختصات قرار گرفته و

توسط منحنی $y^2 = 1-x$ محدود شده حول محوری عمود بر سطح xy

در (1,0) را پیدا می نمائیم .

حل : فاصله هر نقطه دلخواه p(x,y) از نقطه (1,0) برابر است با :



$$f(x,y) = r = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

ادامه جواب :

$$M=\int_0^1\int_0^{1-y^2}\left[(x-1)^2+y^2\right]dx\,dy$$

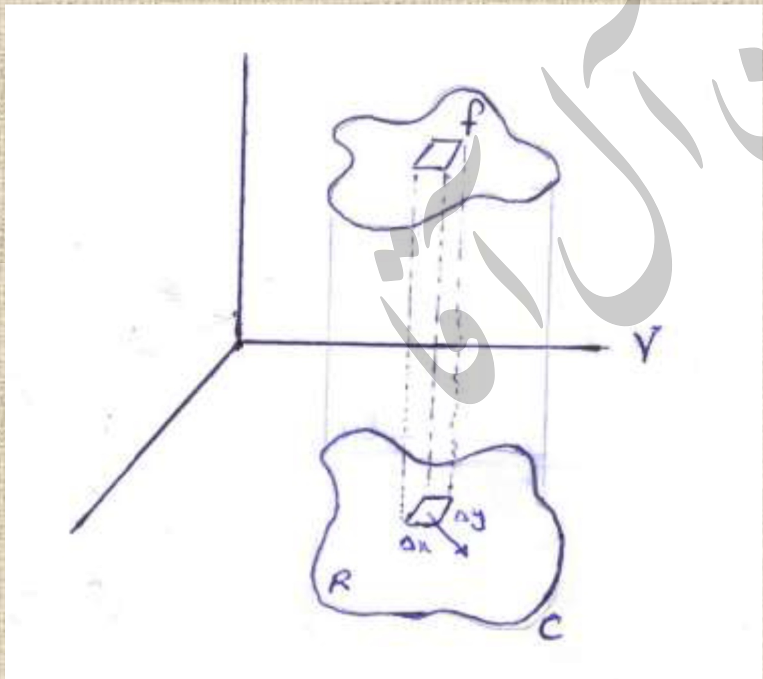
$$=\int_0^1\left[\frac{(x-1)^3}{3}+xy^2\right]_0^{1-y^2}dy$$

$$=\int_0^1\left(\frac{-y^6}{3}+y^2-y^4-\frac{1}{3}\right)dy$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}y^7+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{5}y^5-\frac{1}{3}y\,\Big|_0^1=\frac{44}{105}$$

۲ـ محاسبه حجم :

اگر $z=f(x,y)$ معادله یک سطح (رویه) باشد که توسط منحنی C بوجود آمده آنگاه حجم حادث از آن رویه و دو ناحیه محدود شده بوسیله دو مقطع آن رویه توسط منحنی C بوسیله انتگرال دوبل محاسبه می شود .



$$V=\int_R f(x,y)\,dA$$

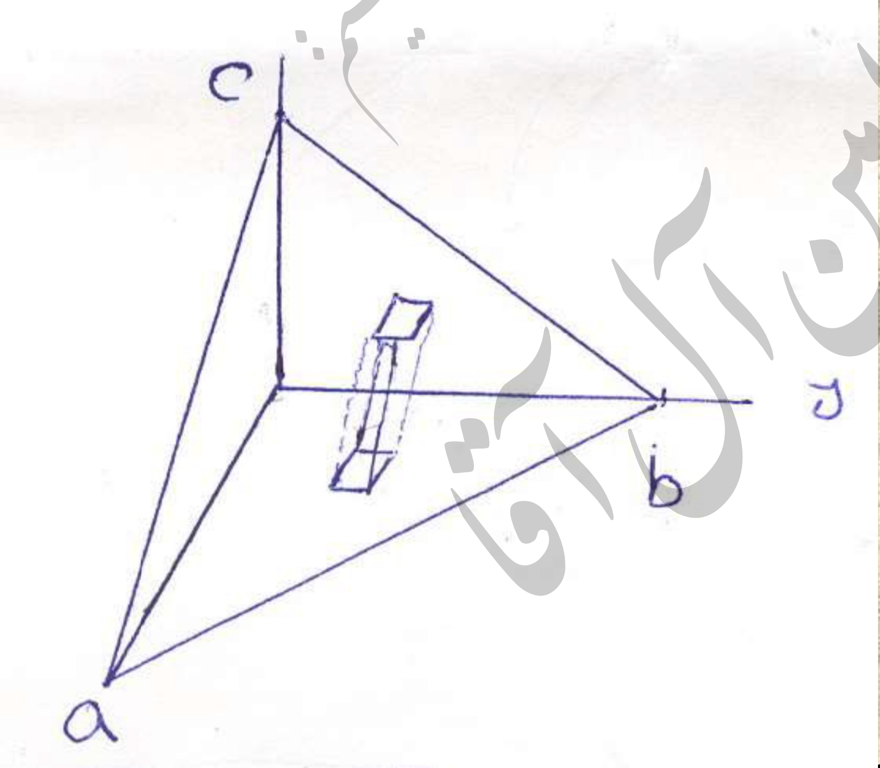
تذکر : (هرگاه f(x,y)=1 باشد انتگرال دوبل

مساحت ناحیه R را بدست می دهد)

$$V=\int_R f(x,y)\,dA$$

مثال :

حجم یک چهار وجهی که توسط سطح $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ و سطوح مختصات محدود شده را پیدا کنید :



حل : $z=c\left(1-\frac{y}{b}-\frac{x}{a}\right)$

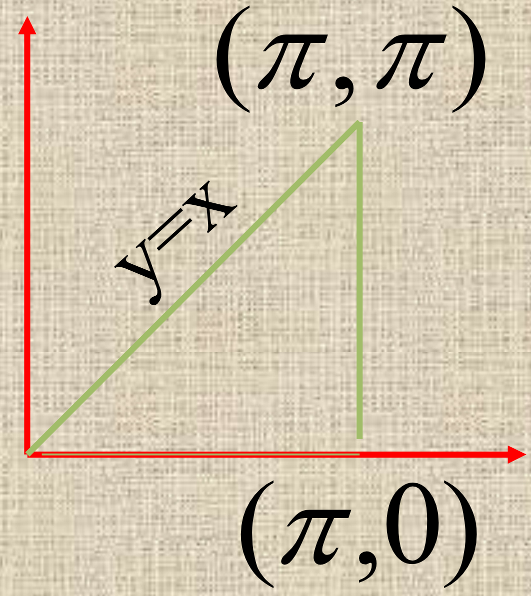
در صفحه xy منحنی C خط $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ است لذا خواهیم داشت :

تمرين: اگر D مثلثي به رئوس (۰و۰)و

$(\pi,0),(\pi,\pi)$ باشد انتگرال زير را

روي D محاسبه كنيد:

$$\iint_D x\cos(x+y)\,dA$$



$$\int_0^{\pi}\left[\int_0^{x} x\cos(x+y)\,dy\right]dx =$$

$$I = \int_0^{\pi}\left[\, x\sin(x+y)\right]_0^{x} dx = \int_0^{\pi} x\sin 2x\,dx$$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \sin 2x\,dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

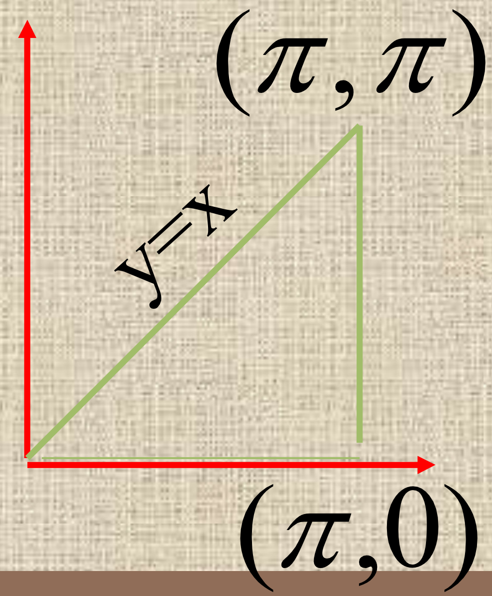
$$I = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \int \frac{1}{2}\cos 2x dx \Big|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x \Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}$$

تمرين: مساحت ناحيه تمرين قبل را به كمك انتگرال دوگانه محاسبه كنيد:

$$\int_0^{\pi}\left[\int_0^{x} dy\right]dx=\int_0^{\pi} y\Big]_0^{x}\,dx=\int_0^{\pi} x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{2}\pi^2$$



تمرين: اگر D ذوزنقه اي به رئوس

A=(1,0),B=(1,2),c و o=(۰ و ۰) =(0,1) باشد

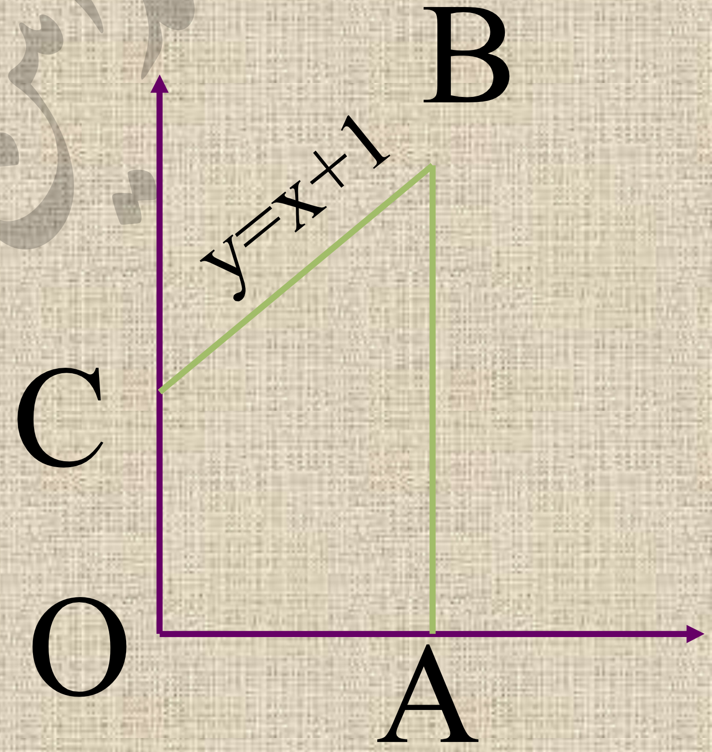
انتگرال زير را روي D محاسبه كنيد:

$$I=\iint_D (1+x)\sin y\,dxdy$$

حل:

$$BC : \frac{y-2}{x-1} = \frac{1-2}{0-1} = 1$$

$$y = x + 1$$



$$I=\int_{0}^{1}\int_{0}^{x+1}(1+x)\sin y\,dy\,dx=$$

$$=\int_{0}^{1}-(1+x)\cos y\ \Big|_{0}^{x+1}=$$

$$=\int_{0}^{1}(-(1+x)\cos(1+x)+(1+x)\cos 0)dx=$$

$$=\int_{0}^{1}(-\cos(1+x)-x\cos(1+x)+1+x)dx=$$

$$u = x \Rightarrow du = dx,$$

$$dv = \cos(1+x)dx \Rightarrow v = \sin(1+x)$$

$$I = \left(\begin{array}{l} -\sin(1+x) - (x\sin(1+x) \\ -\int \sin(1+x)dx + x + \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right)_0^1 =$$

$$= -\sin 2 - \sin 2 - \cos 2 + 1 + \frac{1}{2} +$$

$$+ \sin 1 + 0 + \cos 1 - 0 - 0$$

تمرین: مساحت ناحیه تمرین قبل را به کمك انتگرال دوگانه محاسبه کنید:

$$A=\int_0^1\int_0^{1+x} dydx=\int_0^1 y\,\Big|_0^{1+x} dx=$$

$$=\int_0^1 (x+1)dx=\frac{x^2}{2}+x\,\Big|_0^1=\frac{3}{2}$$

تمرين: انتگرال داده شده را روي ناحيه D محاسبه كنيد:

$$I=\iint_D e^{x+y}\,dA,\quad D=\{(x,y):|x|+|y|\le 1\}$$

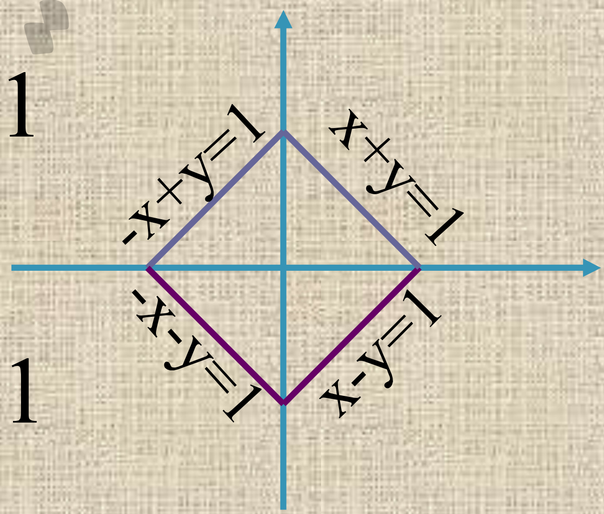
حل:

$$x>0,y>0\Rightarrow x+y\le 1$$

$$x<0,y<0\Rightarrow -x-y\le 1$$

$$x>0,y<0\Rightarrow x-y\le 1$$

$$x<0,y>0\Rightarrow -x+y\le 1$$



$$I = \int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} e^{x+y}\,dx\,dy + \int_{-1}^0 \int_{-y-1}^{1+y} e^{x+y}\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 e^{x+y}\Big|_{y-1}^{1-y} dy + \int_{-1}^0 e^{x+y}\Big|_{-y-1}^{1+y} dy =$$

$$= \int_0^1 (e^{1-y+y} - e^{y-1+y})\,dy +$$

$$+ \int_{-1}^0 (e^{y+1+y} - e^{-y-1+y})\,dy =$$

$$I=\int_0^1 (e-e^{2y-1})dy+\int_{-1}^0 (e^{2y+1}-e^{-1})dy=$$

$$=(ey-\frac{1}{2}e^{2y-1})\Big|_0^1+(\frac{1}{2}e^{2y+1}-e^{-1}y)\Big|_{-1}^0=$$

$$=e-\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}e^{-1}-e^{-1}=e-e^{-1}$$

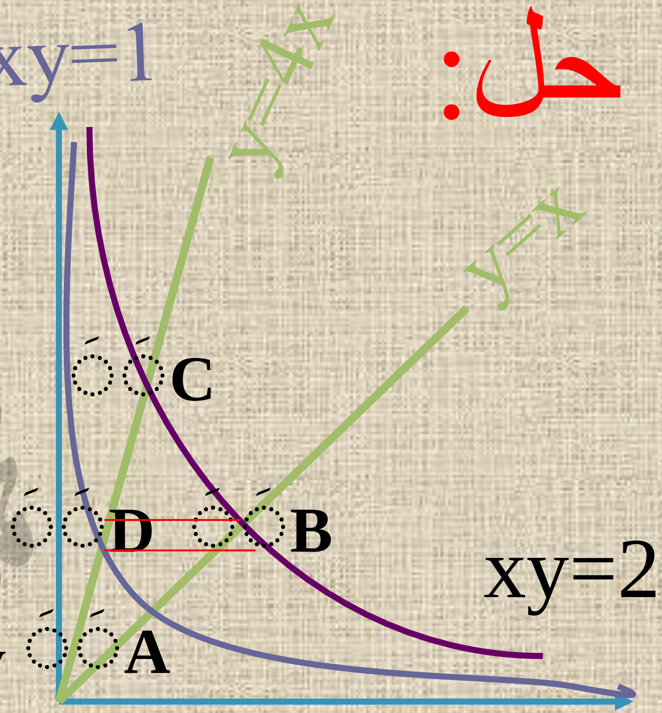
تمرین: مساحت ناحیه تمرین قبل را به کمك انتگرال دوگانه محاسبه کنید:

$$A=\int_0^1\int_{y-1}^{1-y} dxdy+\int_{-1}^0\int_{-y-1}^{y+1} dxdy=2$$

تمرين: انتگرال داده شده را روي ناحيه D محصور بين دو هذلولي $xy=2$, $xy=1$ و خطوط $y=x$, $y=4x$ واقع در ربع اول محاسبه كنيد:

$$I = \iint_D x^2 y^2 \, dxdy$$

حل:



$$A:\begin{cases} xy=1 \\ y=x \end{cases} \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1=y$$

$$B:\begin{cases} xy=2 \\ y=x \end{cases} \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\sqrt{2}=y$$

$$C:\begin{cases} xy=2 \\ y=4x \end{cases} \Rightarrow 4x^2=2 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y=2\sqrt{2}$$

$$D:\begin{cases} xy=1 \\ y=4x \end{cases} \Rightarrow 4x^2=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=2$$

$$I=\int_{1}^{2}\int_{1/y}^{2/y} x^2y^2\,dx\,dy+\int_{2}^{\sqrt{2}}\int_{y/4}^{y} x^2y^2\,dx\,dy+$$

$$+\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\int_{y/4}^{2/y} x^2y^2\,dx\,dy=\int_{1}^{2}\frac{1}{3}x^3y^2\Big|_{1/y}^{2/y}dy+$$

$$+\int_{2}^{\sqrt{2}}\frac{1}{3}x^3y^2\Big|_{y/4}^{y}dy+\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\frac{1}{3}x^3y^2\Big|_{y/4}^{2/y}dy=$$

$$I=\int_{1}^{2}\left(\frac{8}{3y}-\frac{1}{3y}\right)dy+\int_{2}^{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}y^{5}-\frac{1}{192}y^{5}\Big|\right)dy$$

$$+\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\left(\frac{8}{3y}-\frac{1}{192}y^{5}\right)dy=\int_{1}^{2}\left(\frac{7}{3y}\right)dy+$$

$$+\int_{2}^{\sqrt{2}}\frac{47}{48}y^{5}dy+\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\left(\frac{8}{3y}-\frac{1}{192}y^{5}\right)dy=$$

$$=\frac{7}{3}\mathrm{Lny}\Big|_{1}^{2}+\frac{47}{48\times 6}y^{6}\Big|_{2}^{\sqrt{2}}+\frac{8}{3}\mathrm{Lny}-\frac{1}{192\times 6}y^{6}\Big|_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}=$$

$$= \frac{7}{3} \mathrm{Ln}\, y \Big|_{1}^{2} + \frac{47}{48 \times 6} y^{6} \Big|_{2}^{\sqrt{2}} + \frac{8}{3} \mathrm{Ln}\, y - \frac{1}{192 \times 6} y^{6} \Big|_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} =$$

$$I = \frac{7}{3} \mathrm{Ln}\, 2 + \frac{47}{48 \times 6} 2^{3} - \frac{47}{48 \times 6} 2^{6} + \frac{8}{3} \mathrm{Ln}\, 2^{3/2} -$$

$$- \frac{1}{192 \times 6} 2^{9} - \frac{8}{3} \mathrm{Ln}\, 2^{1/2} + \frac{1}{192 \times 6} 2^{3} =$$

$$= \frac{7}{3} \mathrm{Ln}\, 2 + \frac{47}{36} - \frac{47}{9} + 4 \mathrm{Ln}\, 2 - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \mathrm{Ln}\, 2 + \frac{1}{144} =$$

$$= 5 \mathrm{Ln}\, 2 - \frac{755}{144}$$

ادامه جواب :

$$V=\int_0^b\int_0^{a\left(1-\frac{y}{b}\right)} c\left(1-\frac{y}{b}-\frac{x}{a}\right)dxdy$$

$$=c\int_0^b\left(x-\frac{x^2}{2a}-\frac{xy}{b}\right)\Bigg|_0^{a\left(1-\frac{y}{b}\right)}dy$$

$$=ac\int_0^b\left(\frac{1}{2}-\frac{y}{b}+\frac{y^2}{2b^2}\right)dy$$

$$=ac\left(\frac{1}{2}y-\frac{y^2}{2b}+\frac{y^3}{6b^2}\right)\Bigg|_0^b=\frac{abc}{6}$$

نکته کاربردي ۱: اگر ناحيه انتگرال گيري R نسبت به محور y ها متقارن و f روي x فرد باشد، چون $f(-x,y)=-f(x,y)$ آنگاه:

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = 0$$

مثال:(۱۴-۲-۱)

$$f(x,y)=2xy$$

$$R: y=2-x^2, y=x^2$$

$$\iint_R 2xy\,dA=0$$

ناحيه Rبين دو منحني محصور است.

نکته کاربردي ۲: اگر ناحیه انتگرال گیري R نسبت به محور y ها متقارن و f روي x زوج باشد، چون $f(-x,y)=f(x,y)$ آنگاه:

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = 2\iint_{rightside\,of\,R} f(x,y)\,dxdy$$

مثال:(۳۶-۲-۱)

مساحت دايره به شعاع r روي ناحيه D : كافي است از تابع f(x,y)=1 روي ناحيه و با توجه به نكته بيان شده انتگرال دو گانه بگيريم:

$$2\int_{-r}^{r}\int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} 1dxdy = ?$$

$$s = 2\int_{-r}^{r} \int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} 1\,dx\,dy = 2\int_{-r}^{r} x\Big|_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} =$$

$$= 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

$$x = r\sin\theta \Rightarrow dx = r\cos\theta d\theta,\ j = r$$

$$s = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2\cos^2\theta d\theta =$$

$$= r^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos 2\theta)d\theta = \pi r^2$$

نكته كاربردي ۳: اگر ناحيه انتگرال گيري R نسبت به محور x ها متقارن و f روي y فرد باشد، چون f(x,-y)=-f(x,y) آنگاه:

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = 0$$

نكته كاربردي ۴: اگر ناحيه انتگرال گيري R نسبت به محور x ها متقارن و f روي y زوج باشد، چون $f(x,-y)=f(x,y)$ آنگاه:

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy =$$

$$= 2 \iint_{upsideofR} f(x,y)\,dxdy$$

انتگرال تریپل (سه گانه)

انتگرال سه گانه :

مشابه انتگرال یک گانه و دو گانه تقسیمات جزئی حجمی را در نظر می گیریم و حجم ناحیه را محاسبه می کنیم

(برای توابع سه متغیره)

$$\int_R f(x,y,z)dv =$$

$$= \int_{z_0}^{z_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} f(x,y,z)dxdydz$$

که با جایگذاری مناسب مشابه انتگرال دوگانه

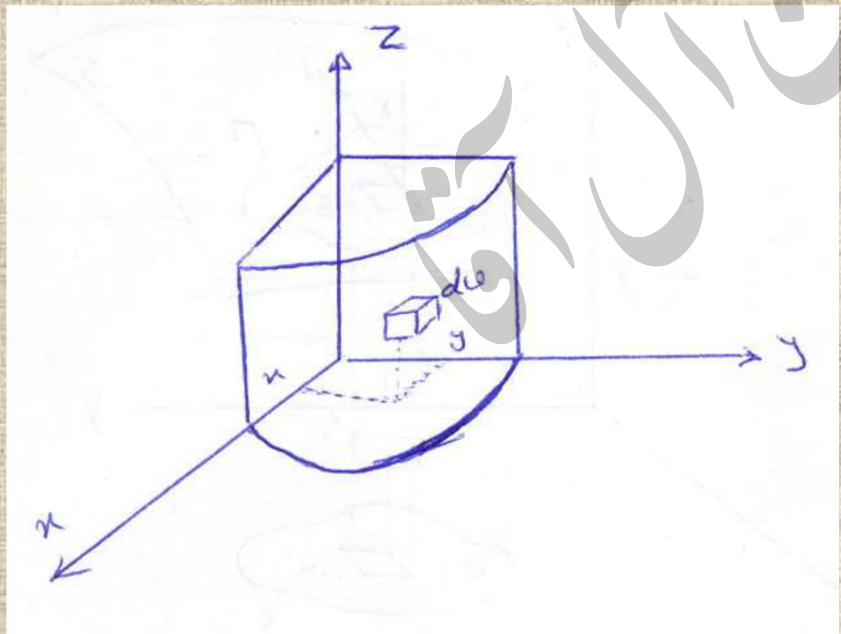
می توان بشکل زیر فرمول را تبدیل کرد :

$$\int_R f(x,y,z)dv =$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_{f_1(z)}^{f_2(z)} \int_{\varphi_1(y,z)}^{\varphi_2(y,z)} f(x,y,z)dxdydz$$

مثال :

ممان اینرسی I_x جسم جامدی را که با استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ و سطوح z=b و z=0 محصور شده حول محور x (مطابق شکل) تعیین می کنیم (با فرض چگالی ثابت δ)



پاسخ :

چون فاصله هر نقطه از محور x با فرمول زیر بدست می آید .

$$r^2 = f(x,y,z) = y^2 + z^2$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$I_x = \int_R \left(y^2 + z^2\right)\delta \ dv$$

$$= 4\delta \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^b \left(y^2 + z^2\right) dzdydx$$

$$= 4\delta \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \left(by^2 + \frac{b^3}{3}\right) dydx$$

$$= 4\delta \int_0^a \left(\frac{by^3}{3} + \frac{b^3 y}{3} \right) \Bigg|_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$= \frac{4\delta b}{3} \int_0^a \left(a^2 + b^2 - x^2 \right) \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

اگر در نظر بگیریم :

$$x = a \sin\theta \qquad dx = a \cos\theta\, d\theta$$

$$x = a \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \qquad x = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$= \frac{4\delta a^2 b}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(a^2 + b^2 - a^2\sin^2\theta\right)\cos^2\theta d\theta$$

$$= \frac{4\delta a^2 b}{3}\left[\left(a^2 + b^2\right)\frac{\pi}{2} - \frac{a^2\pi}{10}\right]$$

$$= \frac{6a^2 b\pi}{12}\left(3a^2 + 4b^2\right)$$

تعریف ژاکوبین :

فرض کنید $u=u(x,y)$ و $v=v(x,y)$ دو تابع دومتغیره پیوسته باشند بطوریکه مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته داشته باشند لذا

دترمینان تابعی u و v نسبت به x و y

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\equiv\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}\equiv$$

$$\equiv J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)\equiv\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

در مورد تابع سه متغیره ژاکوبین بطور مشابه چنین تعریف

می شود :

فرض کنیم :

$$u = u(x, y, z)$$

$$v = v(x, y, z) \qquad w = w(x, y, z)$$

$$J\left(\frac{u, v, w}{x, y, z}\right) \equiv \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

تعریف قبل بهمین ترتیب برای توابعی با بیش از سه متغیر نیز تعمیم می یابد .

از ژاکوبین برای تغییر متغیر انتگرالهای چندگانه استفاده می شود.

بدین ترتیب که اگر لازم شود در انتگرال $\int_R \; f\left(x,y\right)dA$

متغیر با قرار دادن $y = y\left(u,v\right), \quad x = x\left(u,v\right)$

تغییر داده شود عبارت dA برحسب جملات u و v بدین صورت تغییر می کند :

$$dA = \left| J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) \right| dudv$$

به عنوان مثال در تغییر متعیر به مختصات قطبی :

$$x = \rho\cos\theta \quad , \quad y = \rho\sin\theta$$

$$J\left(\frac{x, y}{\rho, \theta}\right) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho$$

$$\Rightarrow dA = \rho \quad d\rho \quad d\theta$$

بنابراین بطور کلی داریم :

$$\int_R f(x,y)\,dA =$$

$$\iint_R f\left[x(u,v),y(u,v)\right] \left| J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)\right| du\,dv$$

$$= \iint_R F(u,v)\,du\,dv$$

و بطور مشابه نیز برای توابع سه متغیره محاسبه می شود .

تغيير متغير

مثال :

انتگرال دوگانه زیر که در دستگاه دکارتی است را به دستگاه قطبی تبدیل و سپس محاسبه می کنیم :

تغییر متغیر به قطبی :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ y = r\sin\theta & o \le r \le a \end{cases}$$

$$I = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dy dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\int_0^a \sqrt{a^2 - r^2}\, r dr}\, d\theta =$$

$$-\frac{1}{3}\left(a^2 - r^2\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^3}{3} d\theta = \frac{a^3 \theta}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{a^3 \pi}{3.2} = \frac{\pi}{6} a^3$$

بهمین ترتیب تغییر متغیر (برای توابع سه متغیره) به دستگاه مختصات استوانه ای بطور خلاصه چنین می شود :

$$I(r,\theta,z) = r$$

وتغییرمتغیر به دستگاه مختصات کروی برابر است با :

$$I(\rho,\theta,\varphi) = \rho^2 \sin\theta$$

مثال :

اگر جسمی باشد که در ناحیه اول مختصات قرار داشته باشد و توسط کره $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ و صفحات مختصات محصور شده باشد.

$\iiint_S xyz\,dv$ را با استفاده از مختصات کروی

ب) با استفاده از مختصات استوانه ای پیدا کنید .

حل قسمت الف :

$$J=\iiint_S xyzdv=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4(\rho\cos\theta\sin\varphi)(\rho\sin\theta\sin\varphi)$$

$$.\rho\cos\varphi.\rho^2\sin\varphi\quad d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

$$=\frac{4^6}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta}_{\tan^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}\sin^3\varphi\cos\varphi d\theta d\varphi$$

ادامه قسمت الف :

$$= \frac{4^6}{6} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \cos\varphi \quad dv$$

$$= \frac{4^6}{48} = \frac{4^4}{3}$$

$$\iiint xyzdv =$$

دنباله حل مثال(قسمت ب):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-r^2}} (r\cos\theta)(r\sin\theta) zrdzdrd\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 \frac{1}{2} z^2 \Big|_0^{\sqrt{16-r^2}} r^3 \cos\theta \sin\theta d\theta$$

ادامه قسمت ب :

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4 \left(16 - r^2\right) r^3 \cos\theta \sin\theta \, dr \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{16}{4} r^4 - \frac{r^6}{6}\right)\Bigg|_0^4 \cos\theta \, d\theta$$

ادامه قسمت ب :

$$= \left(4^{4} - \frac{4^{6}}{6} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left(4^{4} - \frac{4^{6}}{6} \right) = \frac{4^{4}}{3}$$

بنابراین از هر طریق جواب یکی است .

انتگرال خطی :

مقدمه: می دانیم حاصلضرب تغییر مکان و مولفه نیروی وارده در جهت تغییر مکان را کار انجام شده توسط این نیرو گویند .

بعبارت دیگر اگر $\vec{F}$ نیرو و $\vec{R}$ تغییر مکان باشد :

$$\vec{F}.\vec{R} = \underbrace{\left|F\right|\left|R\right|}_{} \cos\theta$$

مولفه F در امتداد تغییر مکان

فرض کنیم که C منحنی نمایش یک تابع برداری $\vec{r}$ در فاصله (a,b) باشد و $\vec{F}$ یک نیروی برداری باشد که در روی C تعریف شده باشد و $\vec{F}.\vec{r}'$ در فاصله [a,b] قابل انتگرال گیری باشد . در اینصورت کار انجام شده توسط نیروی F برای بحرکت در آوردن یک ذره در امتداد C از r(a) تا r(b) عبارت است از :

$$w = \int_a^b \vec{F}\left[\vec{r}(t)\right].\vec{r}'(t)dt$$

مثال :

اگر نیروی $\vec{F}(x,y)=\sqrt{y}\;\vec{i}+(x-y)\vec{j}$

را داشته باشیم مقدار کار انجام شده توسط این نیرو را

برای بحرکت درآوردن ذره ای در امتداد y=x از A(0,0)

تا B(1,1) را بدست آورید .

پاسخ :

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = t \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{R}(t) = x(t)i + y(t)j$$

$$= t\vec{i} + t\vec{j} \qquad 0 \le t \le 1$$

$$\left[x = t \Rightarrow 0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le t \le 1\right]$$

$$\Rightarrow R'(t) = \vec{i} + \vec{j} \qquad (1)$$

ادامه مثال :

$$F(R(t)) = \sqrt{t}\,\vec{i} + (t - t)j = \sqrt{t}\,\vec{i}$$

$$w = \int_0^1 F(R(t)).R'(t)dt$$

$$w = \int_0^1 \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

انتگرال روی خم :

C عبارت از خم $a \le t \le b : (\varphi(t), \phi(t))$

انتگرال روی خم f(x,y) در مسیرC :

$$\int_C f(x, y) ds$$

$$= \int_a^b f(\varphi(t), \phi(t)).\sqrt{(\varphi'(t))^2, (\phi'(t))^2} dt$$

مثال :

انتگرال روی خم روبرو را محاسبه کنید : $\int_C ye^{-x}\,ds$

که C عبارت است از خم زیر :

$$y = 2\tan^{-1} t - t + 3,$$

$$,\left(0 \le t \le 1\right) \quad x = Ln\left(1 + t^2\right)$$

پاسخ :

$$\int_C ye^{-x}\,ds$$

$$= \int_0^1 \frac{2\tan^{-1} t - t + 3}{1+t^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{1+t^2} - 1\right)} dt$$

ادامه پاسخ :

$$= \int_0^1 \frac{2\tan^{-1} t - t + 3}{1+t^2} dt$$

$$= 2\int_0^1 \tan^{-1} t d\left(\tan^{-1} t\right) - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt +$$

$$3\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

ادامه پاسخ :

$$= 2\left(\tan^{-1} t\right)^2 - \frac{1}{2} Ln\left(1 + t^2\right)$$

$$+ 3\tan^{-1} t \Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} Ln2 + \frac{3\pi}{4}$$

مثال :

مطلوبست محاسبه انتگرال $I = \int_c xydx + \left(y - x\right)dy$

در مسیر خطهای زیر که دو نقطه (0,0) و (1,1) را بیکدیگر وصل می کنند :

الف) خط y=x :

حل:

$$I = \int_0^1 \left[x^2 + (\cancel{x} - \cancel{x})dx\right] = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

ب)سهمی $y=x^2$:

حل:

$$I=\int_0^1\left[x^3+2\left(x^2-x\right)x\right]dx$$

$$=\int_0^1\left(3x^3-2x^2\right)dx$$

$$=\frac{3}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$$

ج) سهمی $y^2=x$:

حل:

$$I=\int_0^1\left[x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\left(x^{\frac{1}{2}}-x\right)x^{-\frac{1}{2}}\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)\right]dx$$

$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}.\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{17}{30}$$

دیفرانسیل کامل یا واقعی

یادآوری :

با فرض اینکه $f(x)=F'(x)$ باشد داریم :

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

f(x)dx دیفرانسیل F(x) است

بطور مشابه اگر $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ دو تابع دو متغیره باشند آنگاه در صورتیکه برای

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (۱)$$

تابعی مثل $F(x,y)$ وجود داشته باشد که

$$Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} F(x,y)$$

$$P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} F(x,y)$$

دراینصورت رابطه (۱) را دیفرانسیل واقعی یا کامل F(x,y) گویند و یا بعبارت دیگر برای تابع F(x,y) دیفرانسیل واقعی یا کامل چنین تعریف می شود :

$$dF = \frac{\partial}{\partial x} F dx + \frac{\partial}{\partial y} F dy$$

مثال1 :

$$F(x,y) = xy$$

$$dF(x,y) = ydx + xdy$$

مثال ۲:

با فرض $y \neq 0$

$$F(x,y)=\frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow dF=\frac{ydx-xdy}{y^2}$$

قضیه :

شرط لازم و کافی برای آنکه P(x,y)dx+ Q (x,y)dy

یک دیفرانسیل کامل باشد این است که

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

مثال ۳:

اگر $P(x,y)=y$ و $Q\ (x,y)=-x$ باشد آنوقت

$$\frac{\partial p}{\partial y}=1\neq\frac{\partial Q}{\partial x}=-1$$ بنابراین $ydx-xdy$

دیفرانسیل کاملی نیست .

مثال۴ :

آیا عبارت روبرو دیفرانسیل کاملی است ؟

$$\left[(x+y+1)e^{x}-e^{y}\right]dx+\left[e^{x}-(x+y+1)e^{y}\right]dy$$

حل: بله زیرا :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[(x+y+1)e^{x}-e^{y}\right]=e^{x}-e^{y}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{x}-(x+y+1)e^{y}\right]=e^{x}-e^{y}$$

میدانهای برداری کنسرواتیو
یا میدانهای برداری نگهدارنده :

اگر تابع اسکالر F بنحوی وجود داشته باشد که برای

بردار $\vec{V}$ داشته باشیم $\nabla F = \vec{V}$ در اینصورت F را

پتانسیل یا (نگهدارنده) نامند .

دراینصورت $\vec{V}$ را یک میدان برداری کنسرواتیو نامند

و داریم :

$$\nabla \times \vec{V} = 0$$

مثال :

ثابت کنید که عبارت زیرکنسرواتیو است و تابع پتانسیل آن را بدست آورید .

$$\vec{V} = (x + 2y - z)\vec{i} + (2x - y + z)\vec{j} + (-x + y + 2z)\vec{k}$$

حل :

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+2y-z & 2x-y+z & -x+y+2z \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftarrow \vec{V}$ یک میدان برداری کنسرواتیو است .

طبق تعریف : $\exists F \quad \nabla F = \vec{V} \Rightarrow$

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}$$

$$= V_1\vec{i} + V_2\vec{j} + V_3\vec{k}$$

ادامه جواب :

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = V_1 = x + 2y - z$$

$$\Rightarrow F(x,y,z) = \int (x,y,z)dx =$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 2yx - zx + E(y,z) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = 2x + E_y(y,z) = V_2 = 2x - y + z$$

$$\Rightarrow E(y,z) = -y + z$$

ادامه جواب :

$$E(y,z)=\int(-y+z)dy$$

$$=-\frac{1}{2}y^{2}+yz+h(z)\quad(2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow F(x,y,z)=\frac{1}{2}x^{2}+2xy-zx$$

$$+yz-\frac{1}{2}y^{2}+h(z)\quad(3)$$

$$\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial z}=-x+y+h_{z}(z)=V_{3}$$

ادامه جواب :

$$,V_3 = -x + y + 2z \Rightarrow h_z(z) = 2z$$

$$h(z) = \int 2z\,dz = z^2 + c \quad (4)$$

$$3,4 \Rightarrow F(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy$$

$$-zx - \frac{1}{2}y^2 + z^2 + z + c$$

کرل (چرخه) چرخش

تعریف کرل :

اگر تابع برداری u در همه نقاط تعریف شده مشتق پذیر باشد در اینصورت :

$$curl\vec{u} = \nabla \times \vec{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right) \times u$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

مثال :

کرل u را در نقطه (1,1,1)   محاسبه کنید :

$$\vec{u} = xyz\vec{i} + 2x^{2}yz\vec{j} + 2yz^{2}\vec{k}$$

حل :

$$curl u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xyz & -zx^{2}yz & 2yz^{2} \end{vmatrix} =$$

ادامه جواب :

$$= \left(2z^{2} + 2x^{2}y\right)\vec{i} + xyj^{3} - 4xyz - xz$$

$$\nabla \times u(1,1,1) = 4i + j - 5k$$

تعریف عملگر لاپلاسین:

$$\nabla^2 = \nabla . \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

اگر $\nabla^2 u = 0$ دراینصورت u را تابع هارمونیک گویند .

مثال :

لاپلاسین u را در نقطه (1,0,1) محاسبه کنید .

$$u = 6x^2 y^2 z^2 + x^3$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$= 12y^2 z^2 + 6x + 12x^2 z^2 + 12x^2 y^2$$

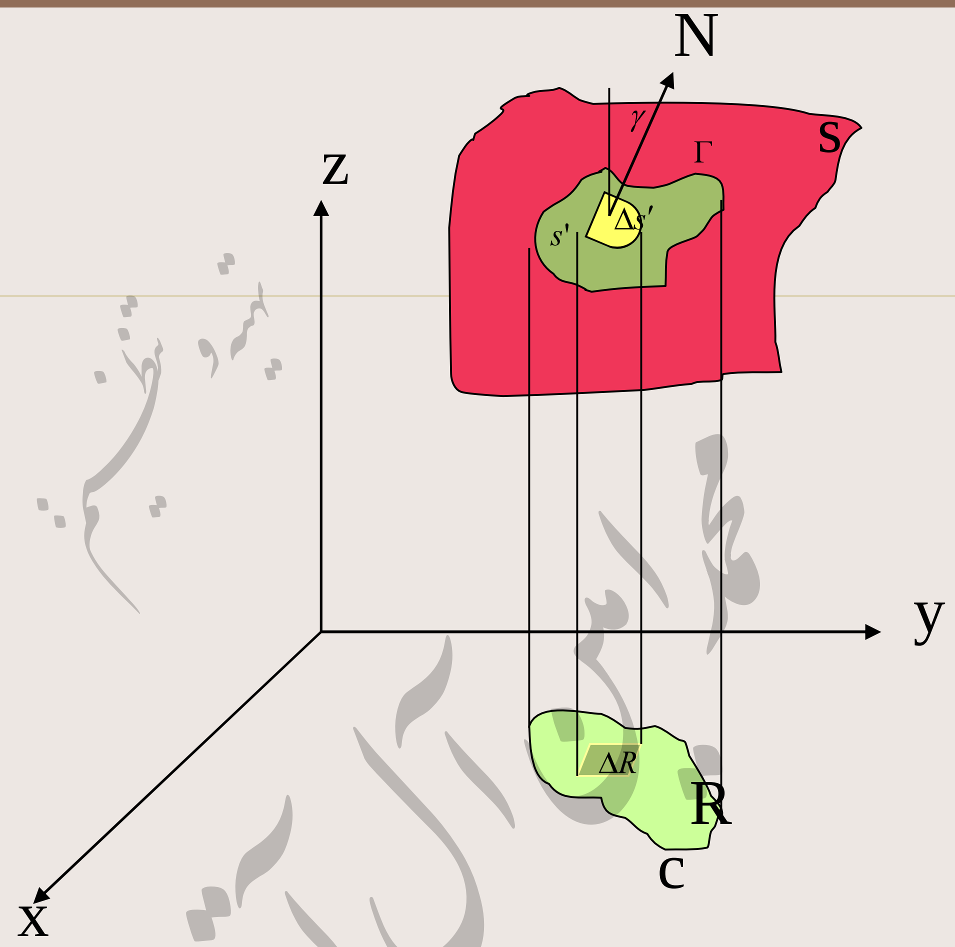
$$\nabla^2 u(1,0,1) = 0 + 6 + 12 + 0 = 18$$

انتگرال رویه ای

برای تعریف و محاسبه مساحت و سطح رویه از انتگرالهای چندگانه استفاده می کنیم :

S قسمتی از سطح رویه که بوسیله منحنی بسته Γ محدود شده و $Z=f(x,y)$ معادله سطح رویه S

(با شرط اینکه هر خط موازی با محور z فقط در یک نقطه سطح **S** را قطع کند محاسبات قابل انجام شدن است .


N
γ
S
Γ
z
Δs'
s'
y
ΔR
R
c
x

C تصویر Γ روی سطح xy و γ زاویه هادی خط

عمود برS یا قائم بر S است و پس از تقسیمات جزئی

روی مساحت ومجموع و حدگیری بطور خلاصه و در

نتیجه:

$$S = \int_R \sec\gamma dA =$$

$$\to \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\ dxdy$$

بطور مشابه اگر بر سطوح دیگر مختصات نیز تصویر کنیم با توجه به زوایای هادی فرمولهای مشابهی حاصل می شود و بطور کلی انتگرال تابع u(x,y,z) روی سطح z=f(x,y) را میتوان چنین تعریف نمود :

$$S=\int_R u(x,y,z)ds=$$

$$\iint_R u[x,y,f(x,y)]\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+1}\,dxdy$$

مثال :

مساحت قسمتی از استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ را که در $\frac{1}{8}$

اول دستگاه مختصات بین سطوح Z=0 و Z=mx

قرار گرفته حساب کنید .

حل :

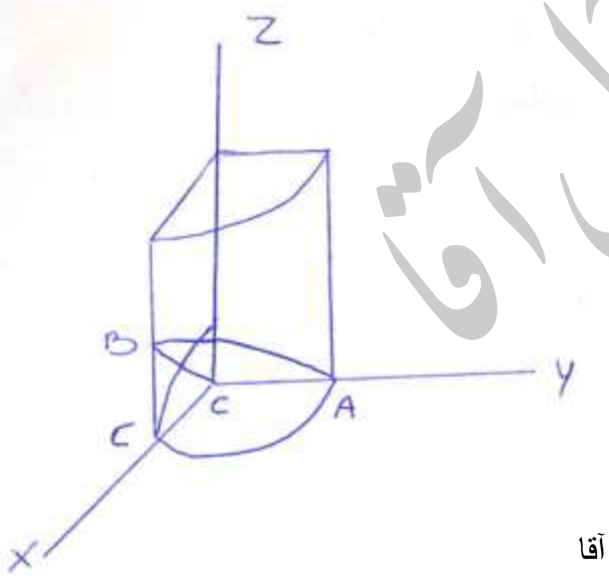
بدیهی است که فقط این سطح روی صفحات

xz یا xy قابل تصویر نمودن است چون

قائم بر سطح xy روی سطح قرار دارد لذا

روی xy قابل تصویر نمودن نیست .

حال با تصویر روی xz داریم :



$$\sec\beta = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 1}$$

$$y^2 = a^2 - x^2$$

$$\sec\beta = \sqrt{0 + \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)^2 + 1}$$

$$= a\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{-1}{2}}$$

ادامه جواب :

$$S = \int_0^a \int_0^{mx} a\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{-1}{2}} dz\,dx$$

$$= \int_0^a amx\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{-1}{2}} dx$$

$$= a^2 m$$

مثال :

انتگرال رویه ای $\iint_R u(x,y,z)ds$ را در صورتیکه رویه

سهمیگون $Z = 2-\left(x^2+y^2\right)$ بوده و u=1 است محاسبه

کنید . (توضیح اینکه چون u=1 است بنابراین $S=\iint_S ds$

یعنی مقدار انتگرال رویه ای همان سطح رویه S است .)

حل :

$$\iint_S u(x,y,z)\,ds =$$

$$\iint_R \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\,dxdy$$

$$=\iint_R \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$$

ادامه جواب :

تصویر را روی صفحه xy می نماییم :

$$R : Z = 0 \Rightarrow 2 - \left(x^2 + y^2 \right) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$$

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2}\, r dr d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{12}\left(1 + 4r^2\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} d\theta = \frac{13\pi}{3}$$

تعریف دیورژانس واگرائی :

تابع برداری مفروض : $\vec{u}(x, y, z) = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$

اگر تابع برداری u در تمام نقاط تعریف شده مشتق پذیر باشد .

دیورژانس تابع u عبارت است از :

$$div\vec{u} = \nabla.\vec{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right).u$$

$$= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}$$

مثال :

دیورژانس u را در نقطه (1,1,1) حساب کنید :

$$u = xyz\vec{i} + y^3 z\vec{j} + xyz^5 \vec{k}$$

$$divu = yz + 3y^2 z + 5xyz^9 = 1 + 3 + 5 = 9$$

قضیه گرین در صفحه :

$$F(x,y)=P(x,y)i+Q(x,y)j$$

اگر R یک میدان درصفحه xy باشد که توسط منحنی C

محدود شده (منحنی بطوری است که هر خط موازی

محورهای مختصات آنرا در بیش از دو نقطه قطع نکند)

اگر P و Q توابعی پیوسته با مشتقات جزئی مرتبه اول

پیوسته باشند در اینصورت $\oint_c Pdx+Qdy=$

$$\iint\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

مثال :

با استفاده از قضیه گرین انتگرال خطی زیر را محاسبه نمائید .

$$I = \oint_c \left(x^2 + y^2\right) dx - 2xydy$$

$$c : x^2 + y^2 = 1$$

حل :

$$I = \iint_R \left(-2y - 2y\right) dxdy =$$

$$= -4 \iint_R ydxdy$$

ادامه جواب :

$$= -4\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r\sin\theta\right)\ \ rdrd\theta$$

$$= -4\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\ \ r^3\sin\theta\Big|_0^1 d\theta$$

$$= -\frac{4}{3}\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta$$

$$= +\frac{4}{3}\cos\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}-\frac{4}{3} = 0$$

تبصره :

قضیه در حالتیکه منحنی بسته C طوری باشد که هر

خط موازی محورهای مختصات آنرا در بیش از دو نقطه

قطع کند نیز صادق است .

مثال :

انتگرال خطی زیر را روی مسیر داده شده حساب کرده و سپس با

استفاده از قضیه گرین مقدارانتگرال را بدست آورید و مقایسه کنید :

$$I = \oint_c y\,dx + 2x\,dy$$

$$R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$$

حل :

طبق قضیه گرین می توان چنین نوشت :

$$I = \oint_{c} = \int_{c_1} + \int_{c_2} + \int_{c_3} + \int_{c_4}$$

c_1 روی مسیر $\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow dy = 0 \\ 0 \le x \le 1 \Rightarrow dx = dx \end{cases}$

c_2 روی مسیر $\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow dx = 1 \\ 0 \le y \le 1 \Rightarrow dy = dy \end{cases}$

ادامه جواب :

$$c_3 \text{ روی مسیر } \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow dy = 0 \\ 0 \le x \le 1 \Rightarrow dx = dx \end{cases}$$

$$c_4 \text{ روی مسیر } \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow dx = 0 \\ 0 \le y \le 1 \Rightarrow dy = dy \end{cases}$$

ادامه جواب :

$$I=\int_0^1 0dx+2x(0)+\int_0^1 y(0)+2dy+$$

$$\int_1^0 dx+2x(0)+\int_1^0 y(0)+2(0)dy$$

$$=\int_0^1 2dy+\int_1^0 dx$$

$$=2y\Big|_0^1+x\Big|_1^0=2-1=1$$

حال با استفاده از قضیه گرین

$$I=\iint_R (2-1)\,dxdy$$

$$=\iint_R dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1 dy=1$$

نتیجه : S مساحت میدان R را می توان از یکی از فرمولهای زیر بدست آورد :

$$S = \oint_c x\,dy = \iint_R dx\,dy$$

$$S = \oint_c y\,dx = -\iint_R dx\,dy$$

$$S = \frac{1}{2}\oint_c -y\,dx + x\,dy$$

مثال :

با استفاده از قضیه گرین سطح بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ را بدست آورید :

حل : می دانیم معادلات پارامتری مسیر بدینگونه است :

$$\vec{R}(t)=x(t)i+y(t)j$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x(t)=a\cos t\Rightarrow dx=-a\sin t\,dt \\ y(t)=b\sin t\Rightarrow dy=b\cos t\,dt \end{cases}$$

ادامه جواب :

$$S = \oint x\,dy = \int_0^{2\pi} (a\cos t)(b\cos t\,dt)$$

$$= ab\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = ab\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos^2 t}{2}\,dt$$

$$= \frac{ab}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = \frac{ab}{2}\left[2\pi\right] = \pi ab$$

تبصره :

در مختصات قطبی مساحت از فرمول زیر به روش قبل

محاسبه می شود :

$$S = \oint_c \frac{1}{2} r^2 \, d\theta$$

اولین فرم برداری قضیه گرین :

$$F = P\vec{i} + Q\vec{j}$$

$$X(t) = x(t)i + y(t)j$$ T بردار واحد مماس بر منحنی

پارامتر طول قوس منحنی $S \Rightarrow d\vec{x} = \vec{T}ds$

$$\int_c \vec{F}.\vec{T}ds = \oint_c \vec{F}.d\vec{x} = \oint_c Pdx + Qdy = \iint_R (\nabla \times F).\vec{k}dxdy = \iint (\nabla \times F).dA$$

که $d\vec{A}$ برداری است عمود بر میدان R و به طول $\left\| d\vec{A} \right\| = dxdy$

تعبیر فیزیکی :

اگر $F(x,y)$ نمایانگر جهت ومیزان شار Flow یک

سیال در نقطه (x,y) در صفحه باشد انتگرال فوق عبارت

از انتگرال مولفه ای از شار است که در جهت مماس بر

منحنی C است و بنام گردش F در اطراف نقاط مرزی

R سوم است .

قضیه دیورژانس (قضیه گرین در فضا)

مقدمه :

بردار نرمال خارجی یک رویه : برداریست که

بر رویه عمود بوده و جهت ان به طرف خارج رویه

باشد .

مثلا : اگر یک کره بمرکز مبدا مختصات و شعاع R

داشته باشیم ($X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2$) ، این کره محور

Z ها را در نقطه A و B قطع می کند آنگاه بردار نرمال

خارجی این کره در دو نقطه A وB به ترتیب K و K-

یعنی در جهت مثبت ومنفی محور Z ها خواهد بود یعنی

$$\left[B(0,0,-R),A(0,0,R)\right]$$

قضیه دیورژانس :

عملا تبدیل انتگرال سه گانه به دوگانه و بالعکس است .

فرض کنید S یک رویه و V فضای داخلی آن و $\vec{n}$ بردار

یکه نرمال خارجی بطوریکه تابع برداری S عبارت از

$$\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$$ که $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$

توابع پیوسته با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشند

در اینصورت خواهیم داشت:

$$\iiint_v \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) dV =$$

$$\iint_s A_1 dydz + A_2 dxdz + A_3 dxdy =$$

$$\iint_s \left(A_1 \cos u + A_2 cocv + A_3 \cos w \right) ds$$

$$\iiint \underbrace{\nabla}_{\text{دیورژانس}} . \vec{A} dv = \iint \vec{A} . \vec{n} ds$$ و یا

که u و v و w زوایای بردار نرمال خارجی رویه S در

جهت مثبت مثلثاتی با محورهای مختصات است .

مثال : قضیه دیور ژانس را در مورد مساله زیر تحقیق کنید.

$$\vec{F}(x,y,z)=x^2\,\vec{i}+y^2\,\vec{j}+z^2\,\vec{k}$$

$$s=\{(x,y,z)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1\}$$

حل :

قضیه دیورژانس :

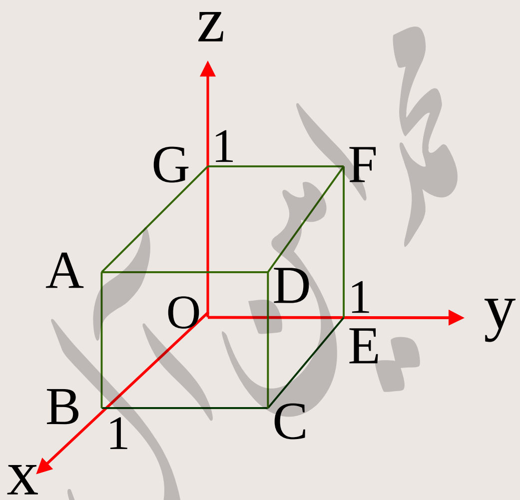
$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds = \iiint_V \nabla.\vec{F}dV$$

$$\iiint_V \nabla.\vec{F}dV = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (2x+2y+2z)dzdydx$$

$$= \int_0^1\int_0^1 (2x+2y+1)dydx$$

$$= \int_0^1 (2x+1)y+y^2\Big|_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 (2x+2)dx = x^2+2x\Big|_0^1 = 3$$


z
G
1
F
A
D
O
1
y
E
B
C
1
x

ادامه حل : رویه S چنین است که از شش سطح تشکیل شده بنابراین داریم :

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds = \iint_{s_1} + \iint_{s_2} + \cdots + \iint_{s_6}$$

$$s_1 = ABCD \quad , \quad \vec{n} = \vec{i} \qquad x = 1$$

$$\iint_{s_1} \vec{F}.\vec{n}ds = \iint_{s_1} \left(x^2 i + y^2 j + z^2 k\right).ids$$

$$\iint_{s_1} x^2 ds = \int_0^1 \int_0^1 dydz = 1$$

ادامه جواب :

$$s_2 = GOEF, \vec{n} = -i, x = 0$$

$$\Rightarrow \iint_{s_2} \vec{F}.\vec{n}ds = -\iint_{s_2} x^2 ds = 0$$

$$s_3 = AGFD, \vec{n} = \vec{k}, z = 1 \Rightarrow$$

$$\iint_{s_3} \vec{F}.\vec{n}ds = -\iint_{s_3} z^2 ds = 1$$

ادامه جواب :

$$s_4 = BOEC, \vec{n} = -\vec{k}, z = 0 \Rightarrow$$

$$\iint_{s_4} \vec{F}.\vec{n}ds = -\iint_{s_4} z^2 ds = 0$$

$$s_5 = DFEC, \vec{n} = j, y = 1 \Rightarrow$$

$$\iint_{s_5} \vec{F}.\vec{n}ds = -\iint_{s_5} y^2 ds = 1$$

$$S_6 = AGOB, n = -j, y = 0 \Rightarrow$$

$$\iint_{S_6} \vec{F}.\vec{n}\,ds = -\iint_{S_6} y^2 ds = 0$$

دومين فرم برداري قضيه گرين (حالت خاص)

$$\oint_c pdy - qdx = \oint_c \vec{F}.\vec{n}\, ds = \iint_R divF dxdy$$

(با توجه به اينكه $divF = \nabla.F = \frac{op}{ox} + \frac{oq}{oy}$)

مثال:

اگر g تابع اسكالري با مشتقات جزئي پيوسته مرتبه اول در ميدان باز s در صفحه xy باشد و R ميداني در s باشد كه نقاط مرزي آن يك منحني بسته ساده c باشد ثابت كنيد

$$\oint_c \frac{\partial g}{\partial n} ds = \iint_R \nabla^2 g \, dxdy$$

حل:

مي دانيم مشتق جهت دار g در امتداد n عبارت است از:

$$\frac{og}{on} = \nabla g . \overrightarrow{n}$$

با جایگزاری داریم:

$$\oint_c \frac{og}{on} ds = \oint_c \nabla g . \overrightarrow{n} \, ds = \iint_R \nabla . \nabla g dxdy$$

قضیه استوکس:

حالت كلي قضيه گرين :

فرض كنيد كه رويه s طوري باشد كه تصاوير آن در صفحات مختصات بوسيله يك منحني بسته مسدود شده باشد ، اگر y=h(x,z) و x=g(y,z) و $z = f(x,y)$

معادلات رویه s باشند و توابع f,g,h پیوسته و دارای مشتقات نسبی مرتبه اول باشند .آنگاه اگر

$$A = A_1 \vec{i} + A_2 \vec{J} + + A_3 \vec{k} \Rightarrow \int_c \vec{A} . \vec{dr} = \iint_S (\nabla \times A) . \vec{n} ds$$

با توجه به اینکه A_1, A_2, A_3 پیوسته و دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته و $d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$

مثال:

قضیه استوکس را در مورد مسئله زیر تحقیق کنید.

$$\vec{A} = Z\,\vec{i} + x\,\vec{j}$$

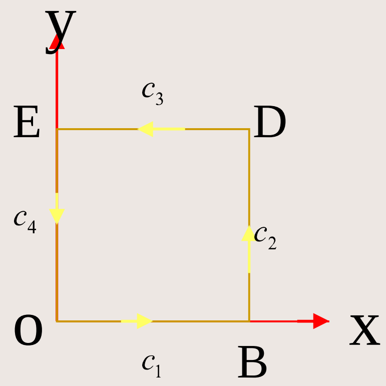
$$s: 0 \le x \le 1,,0 \le y \le 1, z = 1$$

حل:

مي خواهيم تساوي زير (فرمول استوکس) را نشان دهيم:

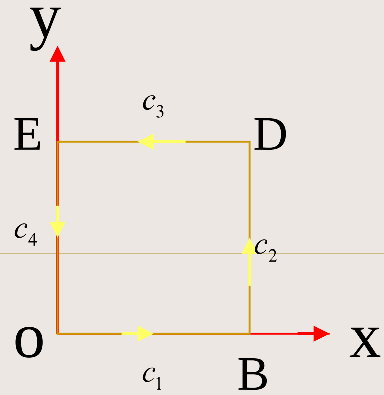
تصویر s روي xy از چهارمسیر c_1، c_2، c_3 و c_4 تشکیل شده

$$\int_c \vec{A}.\vec{dr} = \iint \left(\nabla \times \vec{A} \right) . \vec{n}\, ds$$



طرف اول

$$\int_c A.dr = \int_c (zi + xj).(dxi + dyj + dzk) = \int_c zdx + xdy = \int_{c1} + \int_{c2} + \int_{c3} + \int_{c4}$$



$$z = 1 : c_1 : y = 0, 0 \le x \le 1 \Longrightarrow dy = 0 \qquad \int_0^1 dx = 1$$

$$c_2 : x = 1, 0 \le y \le 1 \Rightarrow dx = 0 \qquad \int_0^1 dy = 1$$

$$c_3 : y = 1, 1 \le x \le 0, dy = 0 \qquad \int_1^0 dx = -1$$

$$c_4 : x = 0, 1 \le y \le 0, dx = 0 \qquad \int 0 dy = 0$$

$$\int_c \vec{A}.\vec{dr} = 1$$

طرف دوم

$$\nabla \times A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z & x & 0 \end{vmatrix} = j = k$$

چون رویه s موازی صفحه xy است پس $\vec{n} = \vec{k}$

$$(\nabla \times A).n = (j + k).k = 1 \Rightarrow \iint (\nabla \times A) nds = \iint 1 ds = \iint_s ds = \iint_R dxdy = 1$$